$1.8\frac{1}{2}$

ⓐ העמודה נראית כך

x^{k-1} x^{k} ..... x^{n-1}

מספר האברים בעמודה הוא $(n-1)-(k-1)+1=n-k+1$

נחשב סכום סדרה הנדסית שמרכיבים $a_1=x^{k-1}$ $n=n-k+1$ $q=x$

$$S=\frac{x^{k-1}(x^{n-k+1}-1)}{x-1}=\frac{x^n-x^{k-1}}{x-1}$$

ⓑ ~~ⓖ~~ אם נחבר כל שורה בנפרד נקבל $1+2x+3x^2+4x^3+\dots+nx^{n-1}$ שזה הסכום שהתבקשנו למצוא עם בסעיף ג. נסמן ב: S.

נרשום למה שווה $S\cdot x$ ← ונחסר בין השורות:

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\dots+nx^{n-1}$$
$$-\ Sx=x+2x^2+3x^3+\dots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$
$$S-Sx=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}-nx^n$$

נשים לב שחוץ מהאיבר האחרון, בצד ימין הוא סכום סדרה הנדסית

$$S(1-x)=\frac{1\cdot(x^n-1)}{x-1}-nx^n\Longrightarrow(1-x)S=\frac{-x^n+1}{1-x}-nx^n$$
$$(1-x)S=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}\longrightarrow S=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-x^n(n+1)+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

③ אם נציב בביטוי $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$ $x=3$ $n=100$ נקבל "כמעט" מה שרצינו (יש 1 "מיותר") ולכן ע"פ הביטוי שמצאנו בב'

$$2\cdot3+3\cdot9+\dots+100\cdot3^{99}=$$
$$\frac{1-3^{100}(100+1)+100\cdot3^{101}}{(1-3)^2}-1=\frac{1-101\cdot3^{100}+100\cdot3^{101}-4}{4}=\frac{3^{100}(-101+300)-}{4}$$
$$=\frac{199\cdot3^{100}-3}{4}$$