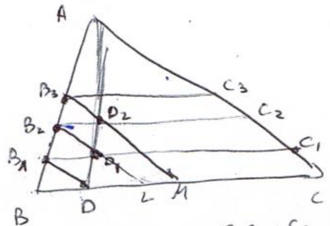
2.12
4'



א'. נעביר את AD $BC \parallel B_2C_2 \parallel B_1C_1$

לפי הנתונים ~~$B_3B_2 = \frac{1}{n^2}B$~~.

$$\frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{\cancel{\frac{1}{n}}(AB_1)}{\cancel{\frac{1}{n}}AB} = \frac{AB-\frac{1}{n}AB}{AB} = 1-\frac{1}{n}$$

לפי תאלס B_2C_2 ו- B_1C_1 מחלקים את AD לקטעים באותו יחס. מצד שני $B_1D \parallel B_2D_1$ מחלקים את BC לקטעים עם באותו יחס. אם נסתכל על ΔDD_2M ו- ΔDD_1L נקבל $\frac{DD_1}{D_1D_2} = \frac{DL}{LM}$, קיבלנו 3 קטעים מחולקים באותו יחס כאשר AD מחולק פעם ע"י B_1C_1 ופעם ע"י B_2D_1 ולכן D_1 היא נקודת החיתוך של B_1C_1 עם AD באותה דרך שאר הנק' D_i.

ב'. $\Delta B_1BD \sim \Delta B_2B_1D_1$ (ז.ז) וכנ"ל שאר המשולשים

$$\frac{S_{B_1BD}}{S_{B_2B_1D_1}} = \frac{\frac{B_2B_1^2\cdot\cancel{\sin\sphericalangle B_2\cdot\sin\sphericalangle B_2B_1D_1}}{\cancel{2\sin\sphericalangle B_2D_1B_1}}}{\frac{B_1B^2\cancel{\sin\sphericalangle B_1\cdot\sin\sphericalangle B}}{\cancel{2\sin\sphericalangle B_1DB}}} = \frac{B_2B_1^2}{B_1B^2} = \frac{\left[\frac{1}{n}(B_1A)\right]^2}{\left[\frac{1}{n}AB\right]^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{n}(AB-\frac{1}{n}AB)\right]^2}{\frac{1}{n^2}AB^2} = \frac{\cancel{\frac{1}{n^2}}}{\cancel{\frac{1}{n^2}}}\cdot\frac{\cancel{AB^2}(1-\frac{1}{n})^2}{\cancel{AB^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

ג'. $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ (ז.ז) וכן שאר המשולשים

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot\cancel{\sin\sphericalangle A}}{\cancel{2}}}{\frac{AB\cdot AC\cdot\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{2}}} = \frac{(AB-AB_1)(AC-AC_1)}{AB\cdot AC} = \frac{(AB-\frac{1}{n}AB)(AC-\frac{1}{n}AC)}{AB\cdot AC} =$$

$$\frac{AB(1-\frac{1}{n})AC(1-\frac{1}{n})}{AB\cdot AC} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

הערה סעיפים ב' וג' בצורה כללית מוכחים ע"י המשולשים n ו- n-1 בסדרה, שמקיימים את אותו יחס.

ד'.

$$S_{AB_kC_k} = S_{AB_0C_0}\cdot q^{k-1} = \frac{\overset{\sin\sphericalangle A}{AB\cdot AC}}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^{k-1}$$

$$S_{B_{k+1}D_kB_k} = S_{B_1D_0B_0}\cdot q^{k-1} = \frac{\overset{\sin\sphericalangle B_0B_1D_0}{\frac{1}{n}AB\cdot\frac{1}{n}AC}}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^{k-1}$$

נחלק את 2 הביטויים ונקבל $\frac{1}{n^2}$