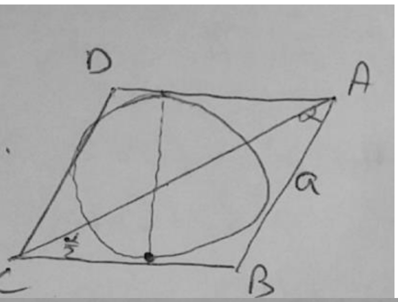
2.60
וג6



II. גובה המעוין שווה לקוטר המעגל החסום במעוין

$$\boxed{R=\frac{a}{2}\sin\alpha} \leftarrow 2R=a\sin\alpha$$

משפט הסינוסים ב ΔABC :

$$\frac{AB}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{AC}{\sin(180-\alpha)}$$

$$AC=\frac{AB\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a2\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{AC=2a\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\measuredangle B}{2}=rp$$

$$=\frac{a^2\sin(180-\alpha)}{\cancel{2}}=r\left(\frac{a+a+2a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$r=\frac{a^2\sin\alpha}{2a+2a\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\sin\alpha}{2+2\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\frac{\alpha}{2})}=\frac{a\sin\alpha}{2\cdot2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

II

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{a}{2}\sin\alpha}{\frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}}=2\cos^2\frac{\alpha}{4}$$

הערך המקס׳ של cos מקבל הוא 1 ולכן הערך המקס׳ של הביטוי הוא 2.

״ המינימלי של cos בזווית חדה מקבל הוא 0 עבור 90° ולכן $\frac{\alpha}{4}=22.5°$

$$2\cos^2 22.5°=1+\cos(2\cdot22.5)=1+\cos45=1+\frac{\sqrt2}{2}=1+\frac{1}{\sqrt2}$$

ערכי הקצה הנ״ל לא מתקבלים עבור זווית חדה (α לא שווה 0 או 90°) ולכן נקבל אי שוויון

תחום (בלי סימן שווה)

$$1+\frac{1}{\sqrt2}<\frac{R}{r}<2$$