2.42
8

נתון $a+c=2b$ (סדרה חשבונית)

ע"פ משפט הסינוסים $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

$a=2R\sin\alpha\ ,\ b=2R\sin\beta,\quad c=2R\sin\gamma$

נציב במשוואה : $2R\sin\alpha+2R\sin\gamma=4R\sin\beta \quad /:2R$

$\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta$

$\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin(\alpha+\gamma)$

$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} \quad /:\ 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\neq 0$ משולש

$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$

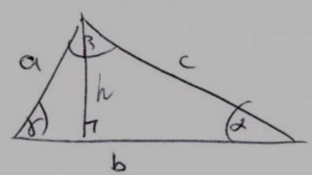
$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \quad /:\ \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\neq 0$ משולש

$\boxed{3=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma}{2}}$

דרך הרבה יותר מסובכת לפתרון התרגיל:

2.42
8



נוריד גובה ל- b ונסמן אותו ב- h.
נחשב את שטח המשולש בשני דרכים
ע"פ $\frac{hb}{2}$ וע"פ הנוסחא rp.

$$r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{hb}{2}$$

ע"פ סדרה חשבונית מתקיים $a+b+c=3b$ ולכן

$$\frac{r\cdot 3b}{2}=\frac{hb}{2}$$

$$\boxed{h=3r}$$

נבטא את צלעות המשולש (a,b,c) בעזרת r והזוויות.

$$\frac{h}{a}=\sin\gamma \rightarrow a=\frac{h}{\sin\gamma}=\frac{3r}{\sin\gamma}$$

$$\frac{h}{c}=\sin\alpha \rightarrow c=\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{3r}{\sin\alpha}$$

את b נבטא ע"פ משפט הסינוסים במשולש הגדול

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3r\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

ע"פ הנתון של סדרה חשבונית מתקיים $2b=a+c$ לכן:

$$2\cdot\frac{\cancel{3r}\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}=\frac{\cancel{3r}}{\sin\gamma}+\frac{\cancel{3r}}{\sin\alpha} \quad /:3r$$

$$\frac{2\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} \quad /\cdot\sin\alpha\sin\gamma$$

$$4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \quad /:\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\neq 0$$

$$2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \quad /:\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\neq 0$$

$$\boxed{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma}{2}=3}$$