

יש לפרוט מהי כיתת האס צ' האחרת!! מבחן טרימסטר ב' במתמטיקה

משך המבחן: 3.5 שעות. יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

אם במכנה של ביטוי כלשהו מופיעים שורשים – יש להשתחרר מהאי-רציונליות במכנה.

כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה!

שאלה 1 (18%)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+3)^2}{(x+a)^3}$

9% א. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה עולה בקטע $-5 < x < -3$ בלבד.

ב. חקור את הפונקציה כאשר $a=1$:

2% 2. נקודות חיתוך עם הצירים.

1% 1. תחום הגדרה.

2% 4. תחומי עליה וירידה.

1% 3. אסימפטוטות.

2% 6. צייר רשומת (סקיצה) של הגרף.

1% 5. נקודות קיצון.

שאלה 2 (18%)

נתונה הפרבולה $y = mx^2 - x$ ונתון הישר $y = m^2x$ כאשר m פרמטר חיובי.

הגרפים של הפונקציות דלעיל נחתכים בשתי נקודות.

א. מצא את נקודות החיתוך.

ב. מצא (בתלות ב- m) את השטח הכלוא בין הפרבולה והישר דלעיל.

ג. מהו ערכו המינימלי של השטח דלעיל?

שאלה 3 (18%)

9% א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה a_1, a_2, \dots

המוגדרת על-ידי נוסחת הנסיגה $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n - 2n - 1, n = 1, 2, \dots$

9% ב. נתון טור גיאומטרי אינסופי: $(\sqrt{5}+2)+1+(\sqrt{5}-2)+\dots$

1. הוכח שהוא מתכנס.

2. מצא את סכומו.

שאלה 4 (14%)

- 6% א. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
- 8% ב. נתון המספר $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. הוכח כי:
1. לכל n טבעי המספר הנתון מתחלק ב-9.
 2. לכל n טבעי ואי-זוגי המספר הנתון מתחלק ב-18.

שאלה 5 (18%)

- 9% א. פתור: $\cos x + \cos 3x + (\sqrt{3} \cos x + \sin x) \cos x = 0$
- 9% ב. פתור את האי-שוויון: $2 \cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 \leq 0$

שאלה 6 (14%)

- בגזרה מעגלית AOB ($OA = OB = R$ רדיוס המעגל) ונתון $\angle AOB = \alpha$, $0 < \alpha < \pi$.
- דרך האמצע C של הרדיוס OA מעבירים ישר מקביל לרדיוס OB שחותך את הקשת בנקודה D . נסמן $\angle BOD = x$. הוכח:
- 7% א. $\sin x = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- 3% ב. זווית x חדה (או $\cos x > 0$).
- 4% ג. שטח המשולש COD הוא $\frac{1}{8} R^2 \sin \alpha (\sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)$.

בהצלחה!

1 סדר גודל

(k) $F(x) = \frac{(x+3)^2}{(x+a)^3}$

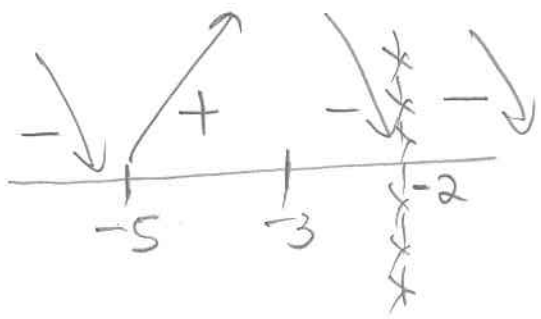
$x \neq -a$

$$F' = \frac{2(x+3)(x+a)^3 - 3(x+a)^2(x+3)^2}{(x+a)^6} = \frac{(x+3)(x+a)^2 [2(x+a) - 3(x+3)]}{(x+a)^6}$$

$$F' = \frac{(x+3)(2x+2a-3x-9)}{(x+a)^4} = \frac{(x+3)(2a-9-x)}{(x+a)^4} \rightarrow$$

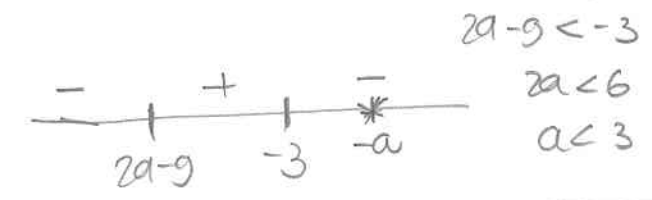
מנה סופית
כנה

$x = -3 \quad x = 2a-9 \quad x \neq -a$

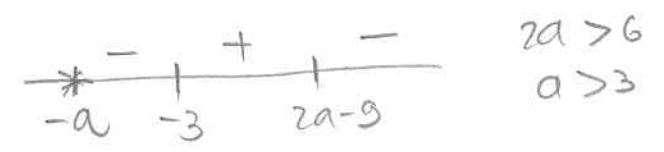


$2a-9 = -5$
 $2a = 4$
 $a = 2$

קטן קטן



$2a-9 > -3$



קטן קטן > קטן

(p) $a=1 \Rightarrow y = \frac{(x+3)^2}{(x+1)^3} \Rightarrow y' = \frac{(x+3)(-7-x)}{(x+1)^4}$

(1) $x \neq -1$

(2) $x=0 \Rightarrow (0,9) \quad y=0 \Rightarrow (-3,0)$

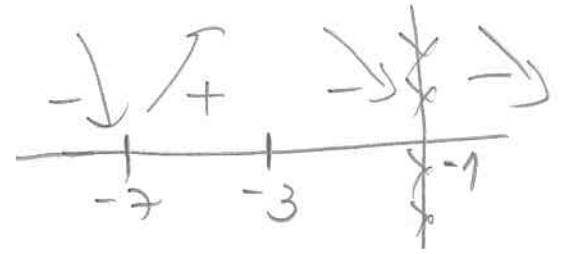
(3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -\infty$
 $\Rightarrow x = -1$
קטן

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(x+3)^2}{x(x+1)^3} = \dots = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{(x+1)^3} = \dots = 0$$

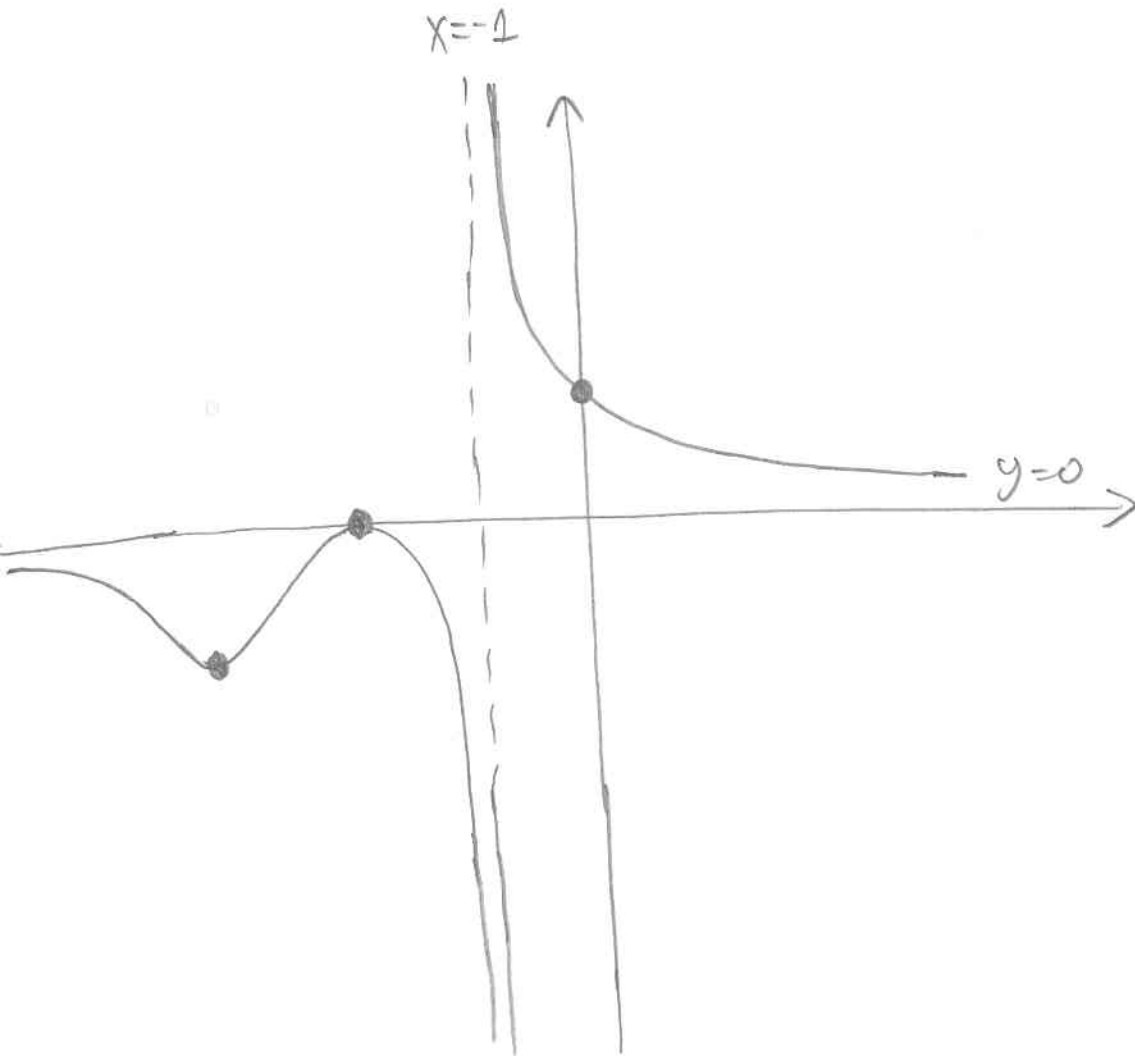
$\Rightarrow \boxed{y=0}$

④ + ⑤



$(-7, \frac{2}{27})$ MIN
 $(-3, 0)$ MAX

$-7 < x < -3$: 1, 2, 18
 $x < -7, -3 < x < -1, x < -1$: 30,



$$\frac{(-7+3)^2}{(-7+1)^3} = \frac{16}{-216} = \frac{-8}{108} = \frac{-4}{54} = \frac{-2}{27}$$

2) a) k

$m > 0$

(k)

$$y = mx^2 - x = x(mx - 1) \quad x=0 \quad x = \frac{1}{m}$$

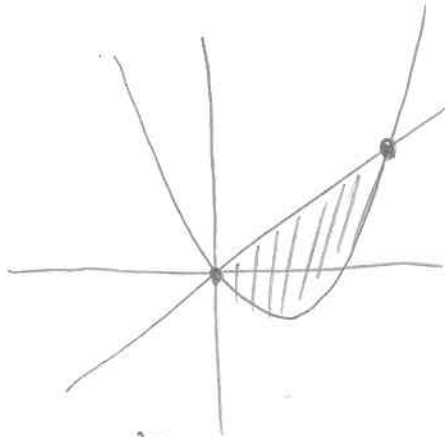
$$y = m^2 x$$

$$m^2 x = mx^2 - x$$

$$x(m^2 + 1) = mx^2$$

$$x=0 \quad \frac{m^2 + 1}{m} = x$$

$$\begin{aligned} & (0, 0) \\ & \left(\frac{m^2 + 1}{m}, m(m^2 + 1) \right) \end{aligned}$$



$$(2) \int_0^{\frac{m^2+1}{m}} m^2 x - mx^2 + x \, dx = \left. \frac{m^2 x^2}{2} - \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{m^2+1}{m}} = x^2 \left(\frac{m^2+1}{2} - \frac{mx}{3} \right) \Big|_0^{\frac{m^2+1}{m}}$$

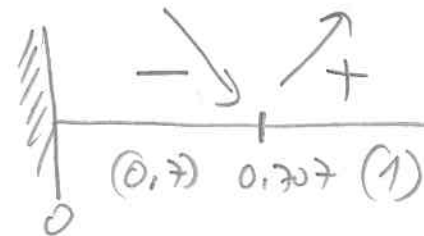
$$\left(\frac{m^2+1}{m} \right)^2 \left(\frac{m^2+1}{2} - \frac{m^2+1}{3} \right) = \frac{(m^2+1)^3}{m^2} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{(m^2+1)^3}{6m^2}}$$


$$F' = \frac{1}{6} \left[\frac{3(m^2+1)^2 \cdot 2m \cdot m^2 - 2m(m^2+1)^3}{m^4} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{2m(m^2+1)^2 [3m^2 - m^2 - 1]}{m^4} \right] =$$

$$S' = \frac{1}{3} \frac{(m^2+1)^2 (2m^2-1)}{m^3} = 0$$

$$m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m > 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ Min}$$



$$S \left(m = \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1 \right)^3}{6 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^3}{3} = \frac{\frac{27}{8}}{3} = \frac{9}{8}$$


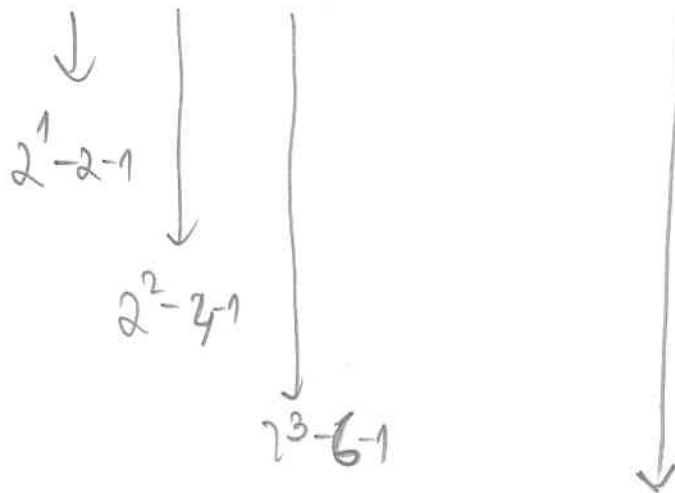
37080

(k)

$$a_{n+1} - a_n = 2^n - 2n - 1$$

1000
9000

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1})$$



1/100 1/100

$$c_n = 2^n$$

$$c_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$$d_n = -2n$$

$$d_{n+1} = 2n - 2$$

$$d_{n+1} - d_n = -2$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 - 2 - 1 = 0$$

$$a_3 = 0 + 4 - 4 - 1 = -1$$

$$a_4 = -1 + 8 - 6 - 1 = 0$$

1, 0, -1, 0,
-1, -1, 1

$$a_n = a_1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 \dots) - (2 + 4 + 6 \dots) - (1 + 1 + 1 \dots)$$

$$a_n = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} - \frac{n-1}{2}(4 + (n-2) \cdot 2) - (n-1)$$

$$1 + 2^n - 2 - (n-1)(n) - n + 1 = 1 + 2^n - 2 - n^2 + n - n + 1 = \boxed{2^n - n^2}$$

(2)

$$a_1 = \sqrt{5} + 2$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = \sqrt{5} - 2$$

$$q = \frac{\sqrt{5} - 2}{1} = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow \text{NONA}$$

$$\sqrt{5} - 2 < 1$$

$$\sqrt{5} < 3$$

$$5 < 9 \quad \checkmark$$

$$S^1 = \frac{\sqrt{5} + 2}{1 - (\sqrt{5} - 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} + 5 + 6 + 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \boxed{\frac{5\sqrt{5} + 11}{4}}$$

(k)

4 ארבע

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2n}}^A = \frac{1}{n+1} + \boxed{\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}^B \quad A-B = \frac{1}{n+1}$$

✓ --- ארבע
 ✓ --- ארבע

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2n}}^A + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \boxed{\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{2n}}^B + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \quad \text{IB}$$

$$A-B + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

ס.ע.נ

2

1 $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

✓ -- ק"ב
✓ -- נחמה

(n+1) --- $\sqrt[3]{}$

$$\frac{(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3}{9}$$

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 9$$

סכום הנחמה
מחולק ב-9

9 → מחולק
9 → מחולק
9 → מחולק



2

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \rightarrow 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + (n+2)^3$

$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + (n+2)^3$ --- ק"ב

n+2 $\sqrt[3]{}$

$$\frac{(n+2)^3 + (n+3)^3 + (n+4)^3}{18}$$

$$(n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 9 + n^3 + 12n^2 + 48n + 64$$

$$(n+2)^3 + 2n^3 + 21n^2 + 75n + 73$$

$$[(n+2)^3 + 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1] + [18n^2 + 72n + 72]$$

סכום הנחמה
מחולק ב-18

18 → מחולק
18 → מחולק
18 → מחולק



15 n d/eu

(k) $\cos x + \cos 3x + \cos x (\sqrt{3} \cos x + \sin x) = 0$

$2 \cos 2x \cos x + \cos x (\quad) = 0$

$\cos x (2 \cos 2x + \sqrt{3} \cos x + \sin x) = 0$

$\cos x = 0$

$x = 90 + 180k$

$\sin x + \sqrt{3} \cos x = -2 \cos 2x$

$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60 = \frac{\sin 60}{\cos 60}$

$\sin x \cos 60 + \cos x \sin 60 = -2 \cos 2x \cdot \cos 60$

$\sin(x + 60) = -\cos 2x$

$\sin(x + 60) = -\sin(90 - 2x)$

$\sin(x + 60) = \sin(-90 + 2x)$

$x + 60 = -90 + 2x + 360k$

$150 + 360k = x$

$x + 60 = \sqrt{180 - (-90 + 2x)} + 360k$

$3x = 210 + 360k$

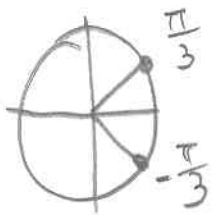
$x = 70 + 120k$

$$⑦ \quad 2\cos(\sqrt{x} + \pi) \leq -1$$

$$\cos(\alpha + \pi) \leq -\frac{1}{2}$$

$$-\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha \geq \frac{1}{2}$$



$$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt{x} = \alpha$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$$

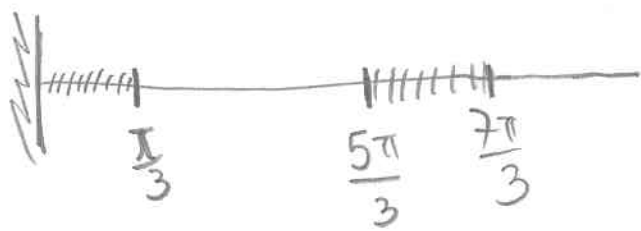
$$0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi^2}{9} \quad (1)$$

$$\frac{5\pi}{3} + 2\pi k \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\parallel \leq \sqrt{x} \leq \parallel$$

$$\left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)^2 \leq x \leq \left(\frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right)^2$$



$$J = \frac{R^2}{4} \cdot (\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha)$$

$$J = \frac{R^2}{4} \cdot (\sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha)$$

$$J = \frac{R^2}{4} \cdot \sin \alpha \left(\sqrt{\frac{4 - \sin^2 \alpha}{4}} - \frac{\cos \alpha}{2} \right)$$

$$J = \frac{R^2}{8} \sin \alpha \left(\sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)$$