

מבחן טרימסטר ב' במתמטיקה – צוק איתן

משך המבחן ארבע שעות. יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

אם במכנה של ביטוי כלשהו מופיעים שורשים – יש להשתחרר מהאי-רציונליות במכנה.

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!**כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!****תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!****יש להתחיל כל שאלה בדף חדש!****שאלה 1 (14%)**נתונה סדרה הנדסית יורדת a_1, a_2, a_3, \dots , שסכומה S_1 ומנתה $\frac{3}{4}$.נתונה סדרה הנדסית יורדת b_1, b_2, b_3, \dots , $b_1 = \sqrt{2}$, סכומה S_2 ומנתה q .נתון: $\frac{S_1}{S_2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots$.4% א. הוכח שהסדרה $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots$ היא הנדסית יורדת והבע את מנת הסדרה בעזרת q .4% ב. חשב את q .6% ג. נתון: $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots = \frac{3\sqrt{2}}{5}$. הוכח שהסדרה $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$ היא הנדסית יורדת, וחשב את a_1 .**שאלה 2 (14%)**5% א. 1. הוכח כי הביטוי $3n^2 - 9n + 4$ זוגי לכל n טבעי.4% 2. נתונה סדרה ע"י נוסחת נסיגה: $a_1 = 7$; $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 9n + 4$, $n = 1, 2, 3, \dots$.הוכח בעזרת אינדוקציה, שלכל n טבעי, a_n הוא מספר אי-זוגי.3% ב. 1. נתון העקום: $f(x) = a + \frac{1}{ax^2}$, $a > 0$. הוכח שהשטח החסום ע"י העקום, ציר x והישרים $x = 1$, $x = 4$ הוא:

$$3\left(\frac{1}{4a} + 1\right)$$

2% 2. עבור אילו ערכים של a השטח שמצאת בסעיף קודם הוא מינימלי?**שאלה 3 (20%)**נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1}$.3% א. מצא את a עבורו הישר $y = x - 3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה הנתונה.(העזר בגבולות עבור אסימפטוטה משופעת, ובמקדם החופשי של הישר $y = x - 3$)ב. חקור את הפונקציה כאשר $a = 0$.2% 1. הוכח כי מתקיים $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$.

1% 2. תחום הגדרה.

3% 4. אסימפטוטות, נקודות אי רציפות.

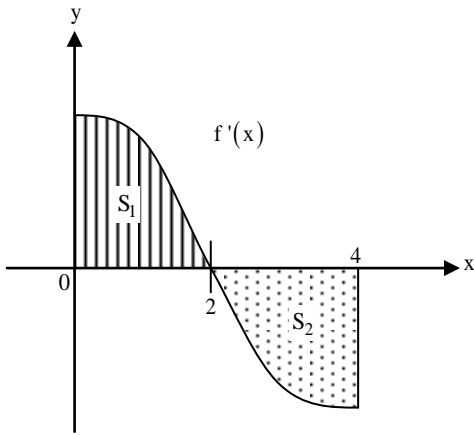
1% 6. נקודות קיצון.

1% 3. נקודות חיתוך עם הצירים.

2% 5. תחומי עליה וירידה.

2% 7. צייר רשומת (סקיצה) של הגרף.

5% ג. חשב את השטח הנמצא בין: גרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ והישרים $y = x + 1$, $x = -3$, $x = -2$.

שאלה 4 (16%)

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 4$. הגרף $f'(x)$ חותך את ציר ה- x ב- $x = 2$. נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל ע"י הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וע"י הצירים (השטח המקווקו).

נסמן ב- S_2 את השטח המוגבל ע"י הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ע"י ציר ה- x וע"י הישר $x = 4$ (השטח המנוקד).

3% א. 1. נתון: $S_1 = 4$, $f(0) = 0$. חשב את $f(2)$.

(רשום את האינטגרל עבור S_1 , בצע את האינטגרל,

הצב את החסמים והשווה לשטח הנתון)

3% 2. נתון: $S_2 = 4$. חשב את $f(4)$.

5% ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה. נמק.

(השתמש בקשרים הידועים בין גרף הפונקציה לנגזרת)

5% ג. סרטט בתחום הנתון סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

שאלה 5 (18%)

8% א. הוכח שהאי-שוויון: $1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x \geq 0$ מתקיים לכל x (העזר בהוצאת גורם משותף, ובתכונות \cos ו- \sin)

10% ב. פתור $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \geq \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ (העזר בסעיף א' ובנוסחאות כפל מקוצר)

שאלה 6 (18%)

במשולש ABC נתון: $\angle B = \beta$, $\angle C = 90 + \beta$, $BC = a$.

9% א. העזר המשפט הסינוסים והוכח $AC = \frac{a \sin \beta}{\cos 2\beta}$.

9% ב. נסמן ב- S את שטח המשולש ABC . העזר בנוסחת השטח והוכח: $\tan 2\beta = \frac{4S}{a^2}$

בהצלחה!

①

$a_1 a_2 a_3 \dots$

$$\frac{a_1}{1-q} = S_1 = \frac{a_1}{1-\frac{3}{4}} = 4a_1$$

$b_1 b_2 b_3 \dots$

$$\frac{b_1}{1-q} = S_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-q}$$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$

$+ a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1}$

$$\frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_n b_n} = \frac{3}{4}q \quad \text{①c}$$

②

$$S = \frac{a_1 b_1}{1-\frac{3}{4}q} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4a_1}{\frac{\sqrt{2}}{1-q}} \Rightarrow$$

$$\frac{4a_1 \sqrt{2}}{1-\frac{3}{4}q} = \frac{4a_1(1-q)}{\sqrt{2}}$$

$$2 = 4(1-\frac{3}{4}q)(1-q)$$

$$q = 2$$

$$2 = (4-3q)(1-q)$$

\emptyset

$$\boxed{q = \frac{1}{3}}$$

$$2 = 4 - 4q - 3q + 3q^2$$

$$3q^2 - 7q + 2 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots$$

$$\frac{b_m}{a_m} + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$$

$$\frac{\frac{b_1}{a_1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{9b_1}{5a_1} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3 \cancel{9} \sqrt{2}}{\cancel{5} a_1} = \frac{\cancel{3} \sqrt{2}}{\cancel{5}}$$

$$\boxed{a_1 = 3}$$

$$\frac{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{\frac{b_m}{a_m}} = \frac{a_m \cdot b_{n+1}}{a_{m+1} \cdot b_m}$$

$$= \frac{9}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

2
k

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$$

$a_1 = 7 \Rightarrow$ כ"א ז' 215 בקיפה

$a_n \rightarrow$ כ"א ז' 215 הנחה

$a_{n+1} \rightarrow$ כ"א ז' 215 צ"ל

$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$ ← ללא אינדוקציה

↑
כ"א ז' 215 לסי
הנחה

$$3n^2 - 3n - 6n - 6 + 10$$

$$3n(n-1) - 6(n-1) + 10$$

$$3(n-1)(n-2) + 10$$

↑
ז' 215
מכפלת < n-1 > ב-3
שיהפוך סולכיף
בזמן

N. N

נניח להוכיח כי:

$$3n^2 - 9n + 4 = \text{ז' 215}$$

אפשר כמובן גם לנסות אינדוקציה
אפשר גם ללא אינדוקציה

לנסות אינדוקציה!

✓ בקיפה

✓ הנחה

$$3(n+1)^2 - 9(n+1) + 4 = \text{צ"ל}$$

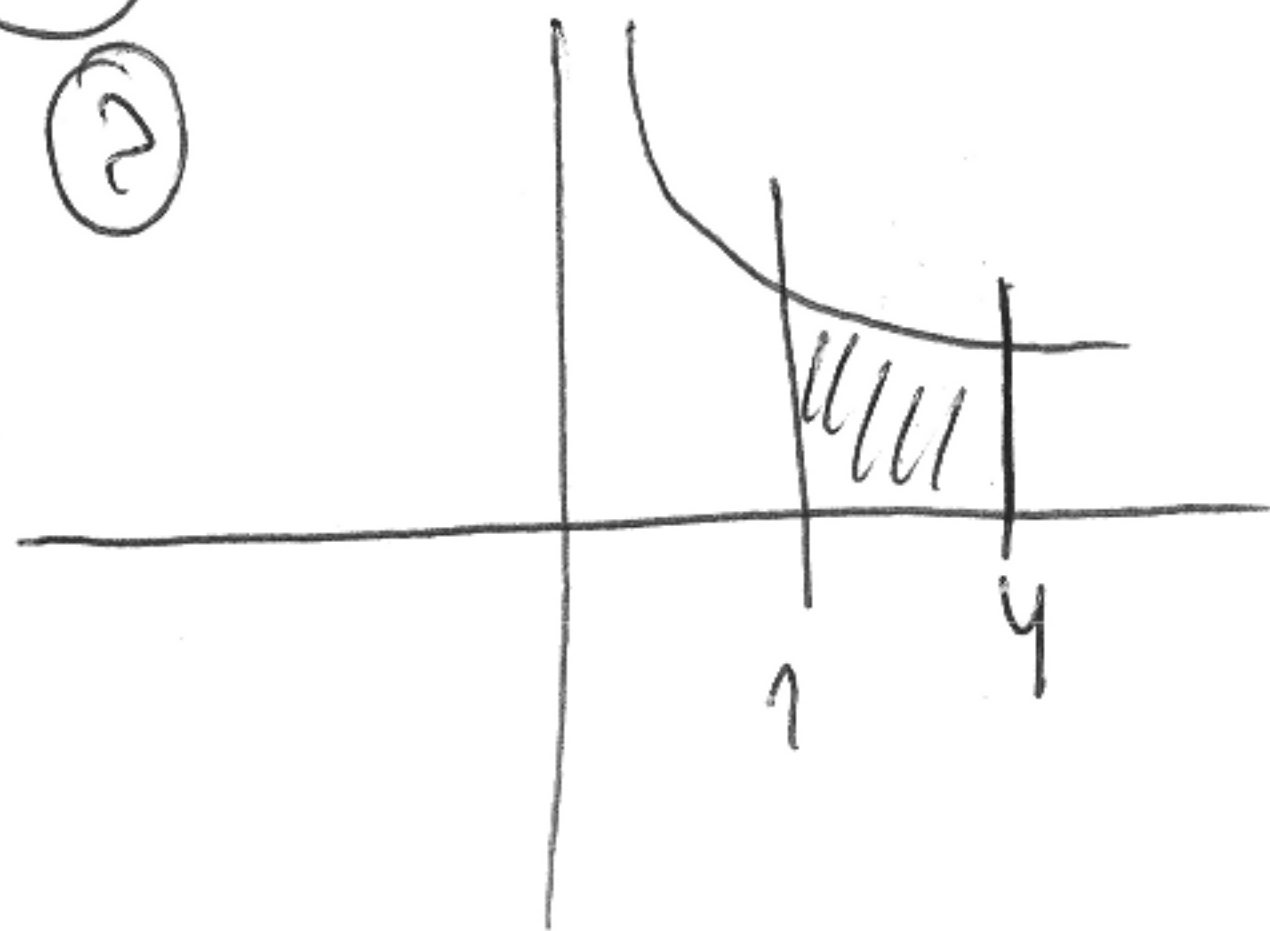
$$3n^2 - 9n + 4 + 6n + 3 - 9$$

ז' 215 לסי
הנחה

6n-6
קואור-ז' 215

N. N

②
②



$$\int_1^4 a + \frac{1}{ax^2} dx = ax + \frac{1}{a} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^4$$

$$ax - \frac{1}{ax} \Big|_1^4 = \left(4a - \frac{1}{4a}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$3a + \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = 3a + \frac{3}{4a}$$

$$3\left(a + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\left(a + \frac{1}{4a}\right)' = 1 - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$4a^2 = 4$$

$$a = \pm \frac{1}{2}$$

$$a > 0$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$C'' = 0 - \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot a^{-3} = \frac{1}{2a^3} > 0$$

Min

3

$$y = \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1}$$

l

$$y = x - 3$$

$$m = 1$$

$$n = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1} - X =$$

$$\frac{x^3 - ax^2 - 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$

$$\frac{-ax^2 + x - 1}{x^2 - 1} = -a = -3$$

$$a = 3$$

2

$$a = 0$$

$$1) y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

$$\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ n/n}$$

$$\begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

$$\frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$x + \frac{1}{x+1}$$

$$2) (0, 1)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ n/n}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -1^-} x + \frac{1}{x+1} = -\infty \\
 & \lim_{x \rightarrow -1^+} x + \frac{1}{x+1} = \infty
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -1^-}} \right\} \boxed{x = -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} + \frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{1}{x+1} - x = 0$$

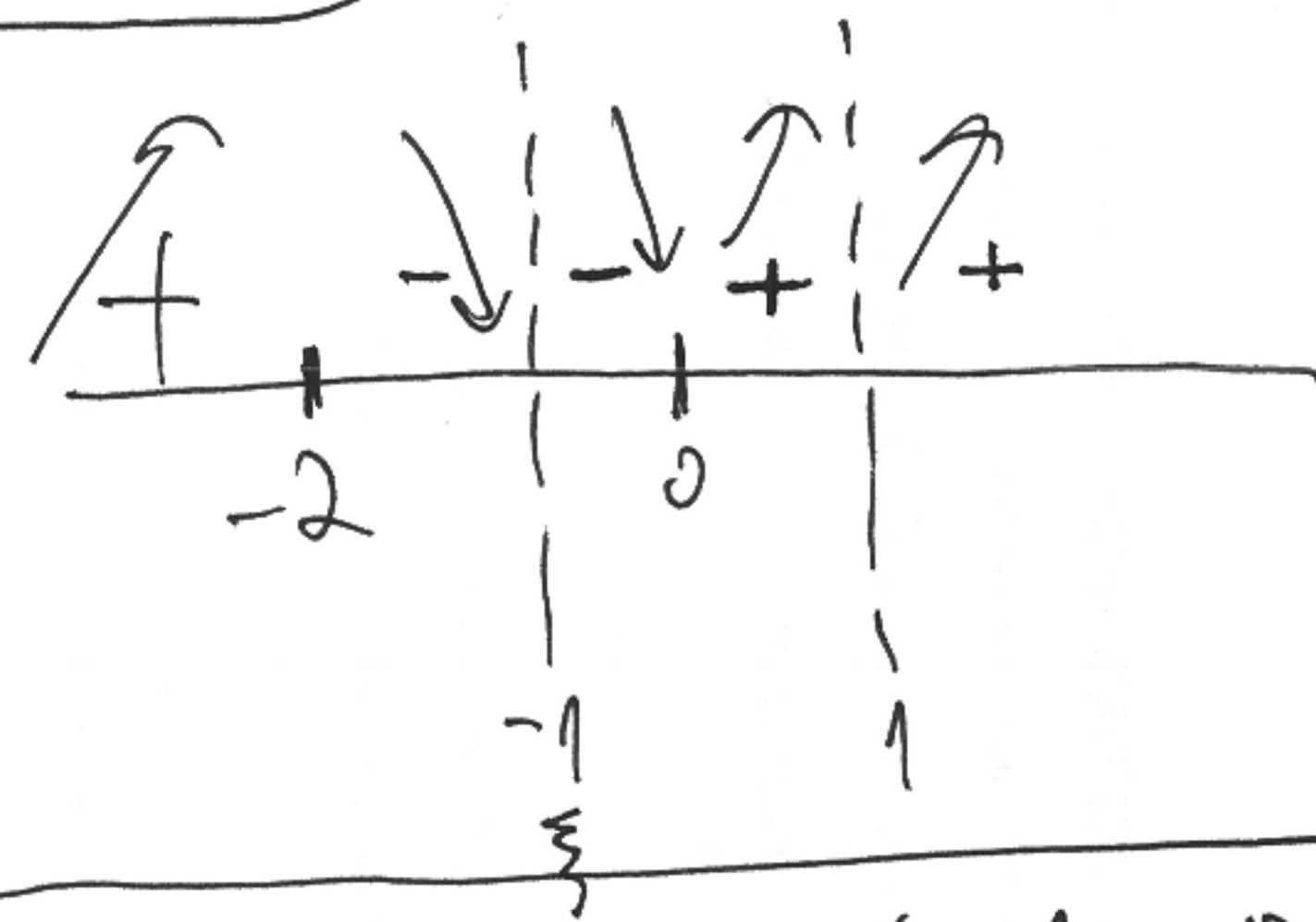
$$\boxed{y = x}$$

$$\begin{aligned}
 (4+5) \quad y' &= 1 + (-1)(x+1)^{-2} = 0 \\
 1 - \frac{1}{(x+1)^2} &= 0 \quad \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = 0 \\
 (x+1)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x+1 &= 1 & x+1 &= -1 \\
 x &= 0 & x &= -2
 \end{aligned}$$

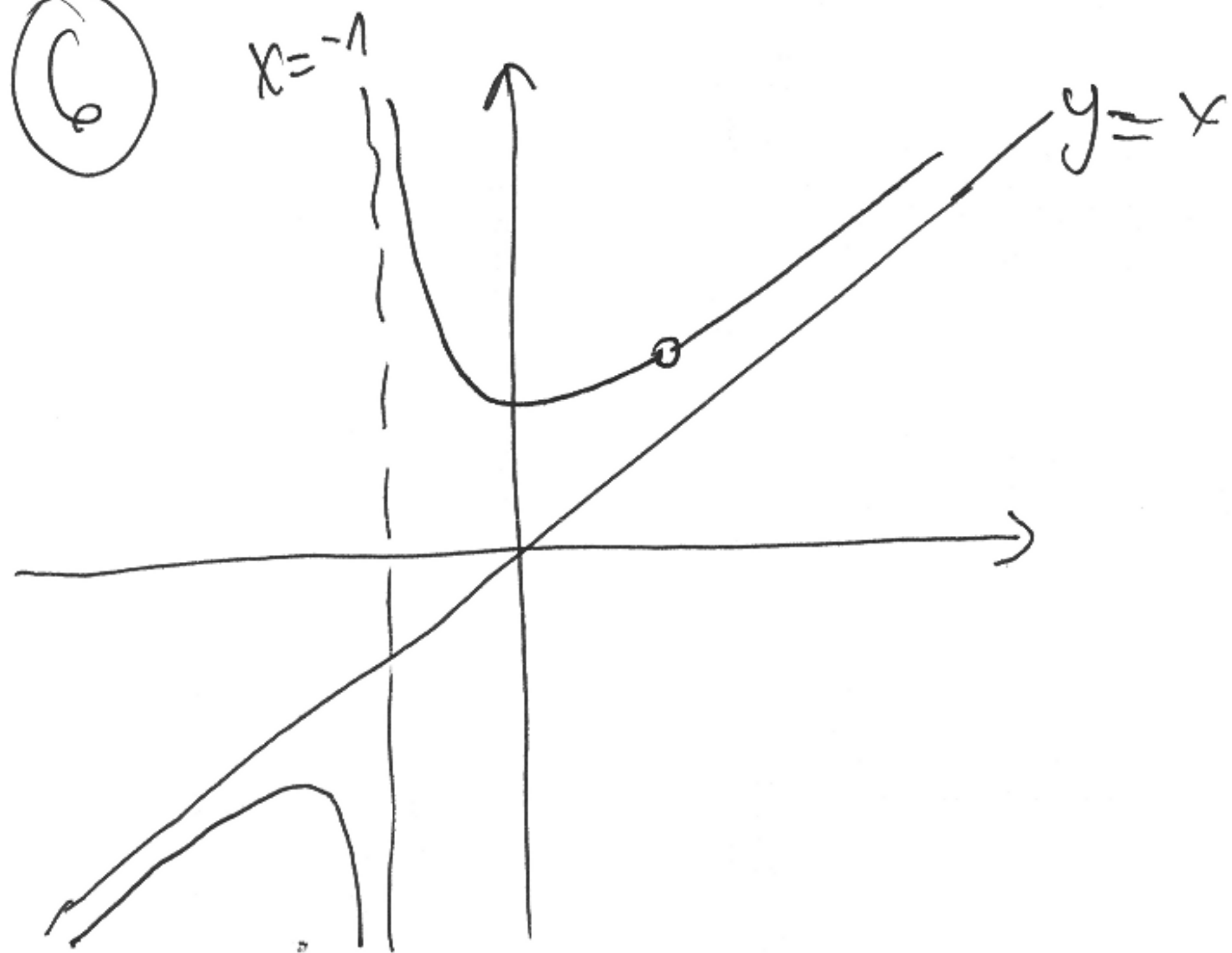
$$\boxed{\text{MW } (0, 1)}$$

$$\boxed{(-2, -3) \text{ MAX}}$$

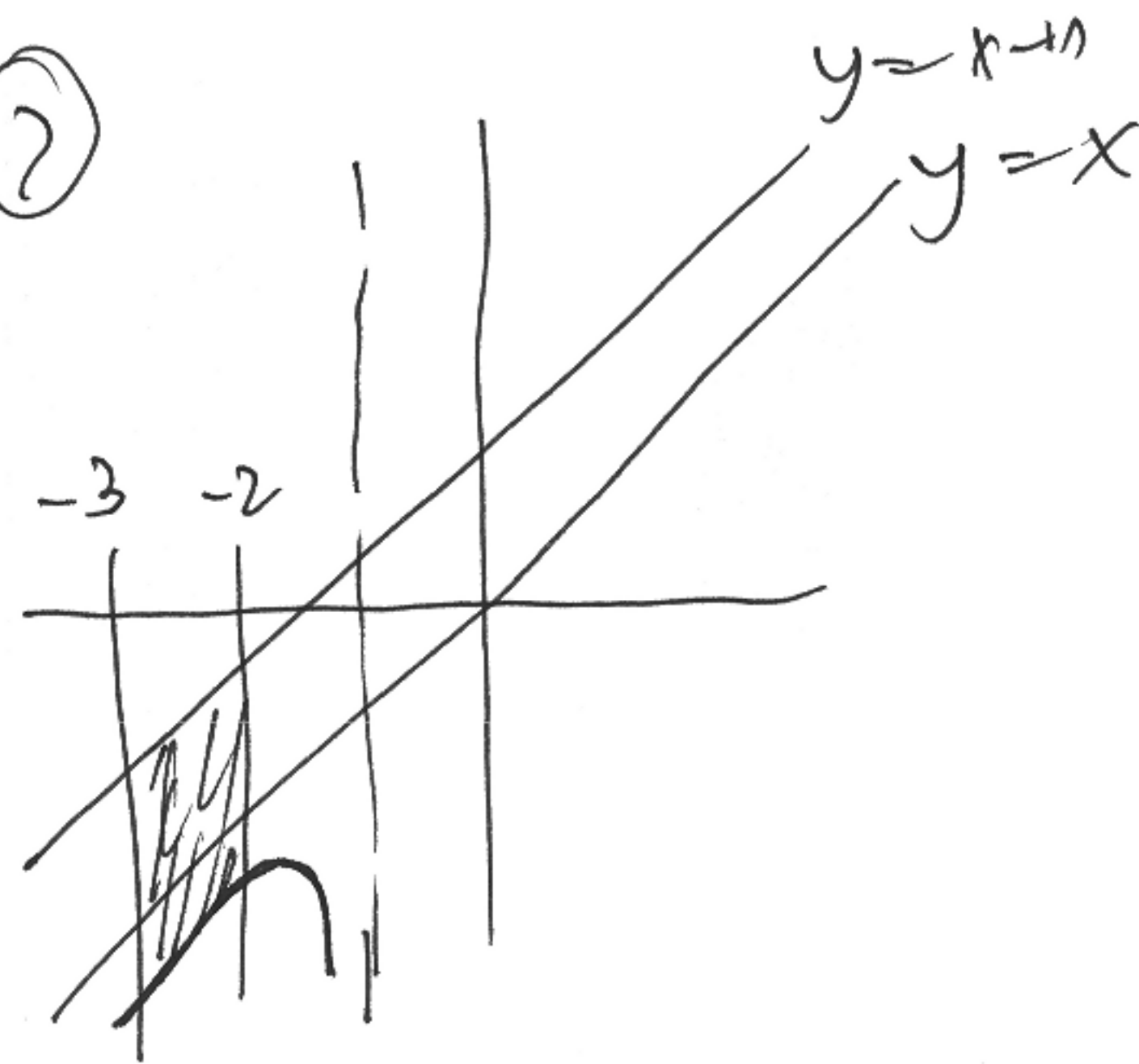


$$\begin{aligned}
 & x < -2, 0 < x < 1, x > 1 \quad \text{in } \mathbb{R} \\
 & -2 < x < -1, -1 < x < 0 \quad \text{! } \mathbb{R} /
 \end{aligned}$$

6



7



$$\int_{-3}^{-2} (x+1) - x - \frac{1}{x+1} dx = x - \ln|x+1|$$

$$(-2 - \ln|-1|) - (-3 - \ln|-2|) =$$

$$\boxed{1 + \ln 2}$$

4

(k)

①

$$\int_0^2 f'(x) dx = F(x) \Big|_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$4 = F(2) - 0 \Rightarrow \boxed{F(2) = 4}$$

②

$$\int_2^4 -f'(x) dx = -F(x) \Big|_2^4 = (-F(4)) - (-F(2))$$

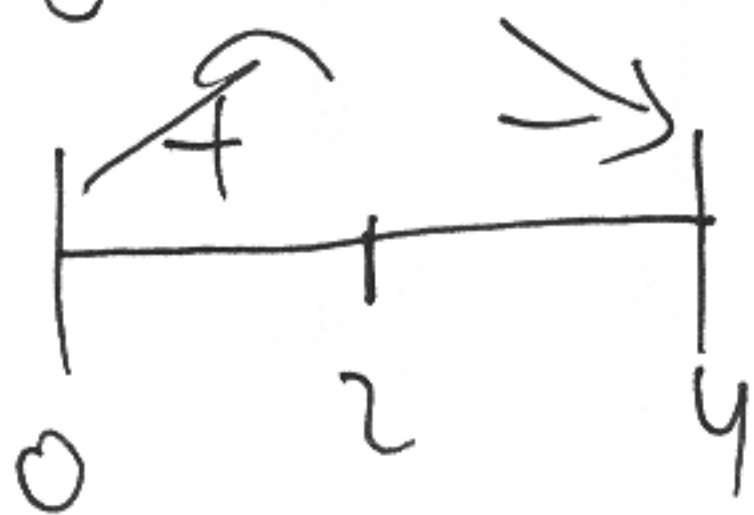
$$4 = -f(4) + 4 \Rightarrow \boxed{F(4) = 0}$$

③

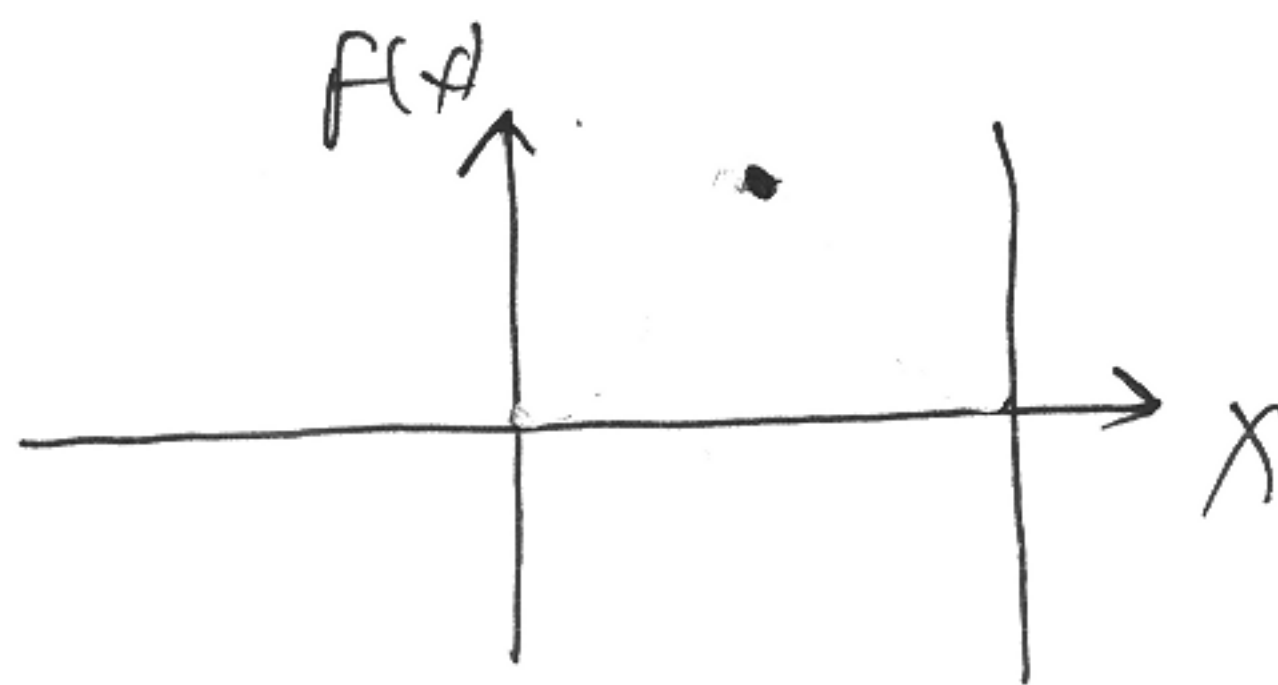
$$\begin{aligned} y' &> 0 & 0 < x < 2 \\ y' &< 0 & 2 < x < 4 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$x = 2 \quad \boxed{(2, 4) \text{ MAX}}$$



④



5) (1)

$$(1 + \sin x) + \cos x(1 + \sin x) \geq 0$$

$$\sin x + 1 \geq 0$$

$$\cos x + 1 \geq 0$$

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) \geq 0$$

Q.E.D.

2)

$$\underbrace{\frac{\cos^2 x}{\sin x}}_{\neq 0} \geq \frac{1 + \sin x}{\underbrace{1 + \cos x}_{\neq 0}}$$

$$\sin x \neq 0$$

$$\cos x \neq -1$$

$$\cos^2 x (1 + \cos x) \geq \sin^2 x (1 + \sin x)$$

$$\cos^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x - \sin^3 x \geq 0$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0$$

$$(\cos x - \sin x) \underbrace{(1 + \cos x \sin x + \cos x + \sin x)}_{\substack{IV \\ 0 \\ \text{E } \int_{00} '58}} \geq 0$$

$$\cos x - \sin x \geq 0$$

$$\cos x \geq \sin x$$

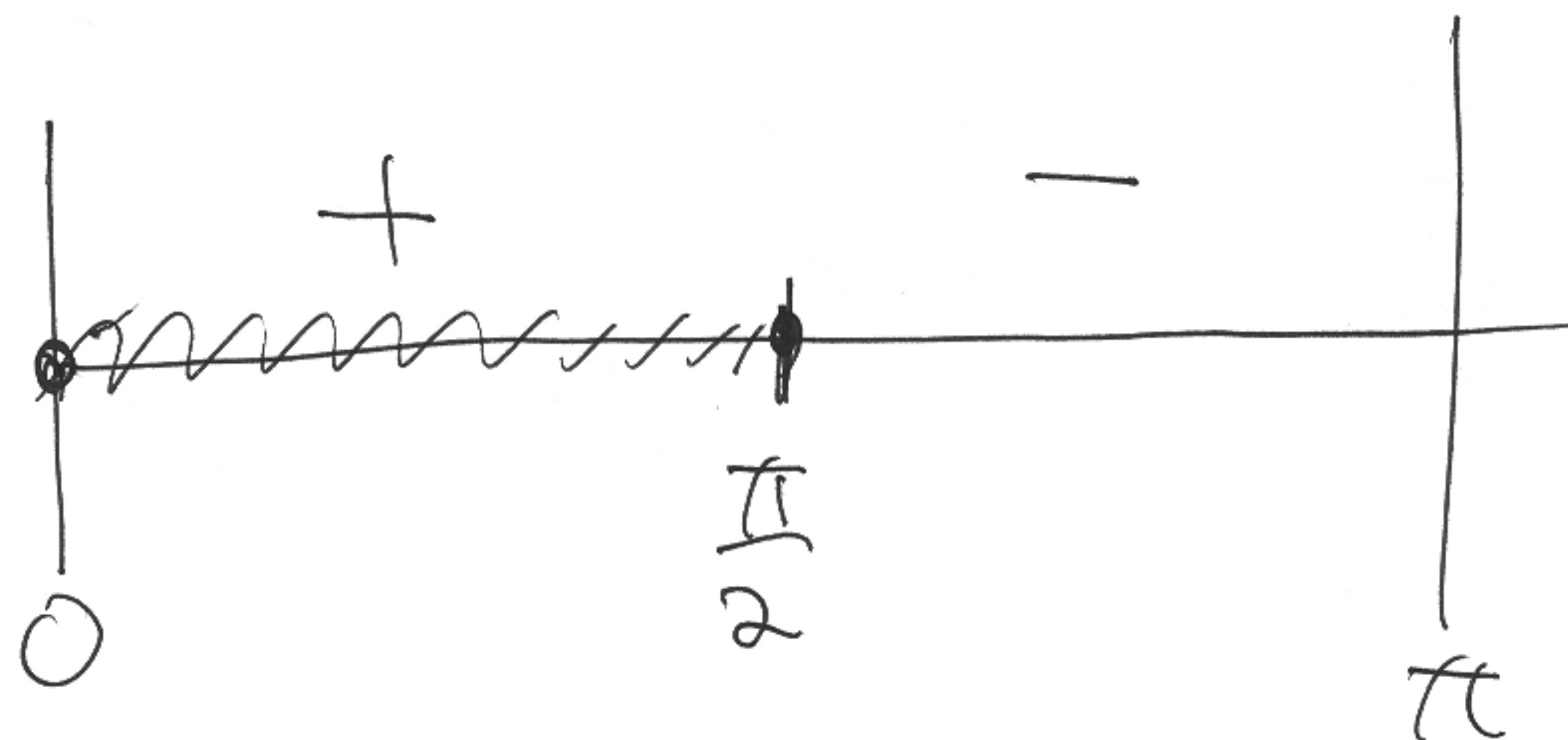
$$\sin(\pi - x) \geq \sin x$$

$$\pi - x = x + 2\pi k$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi k = x}$$

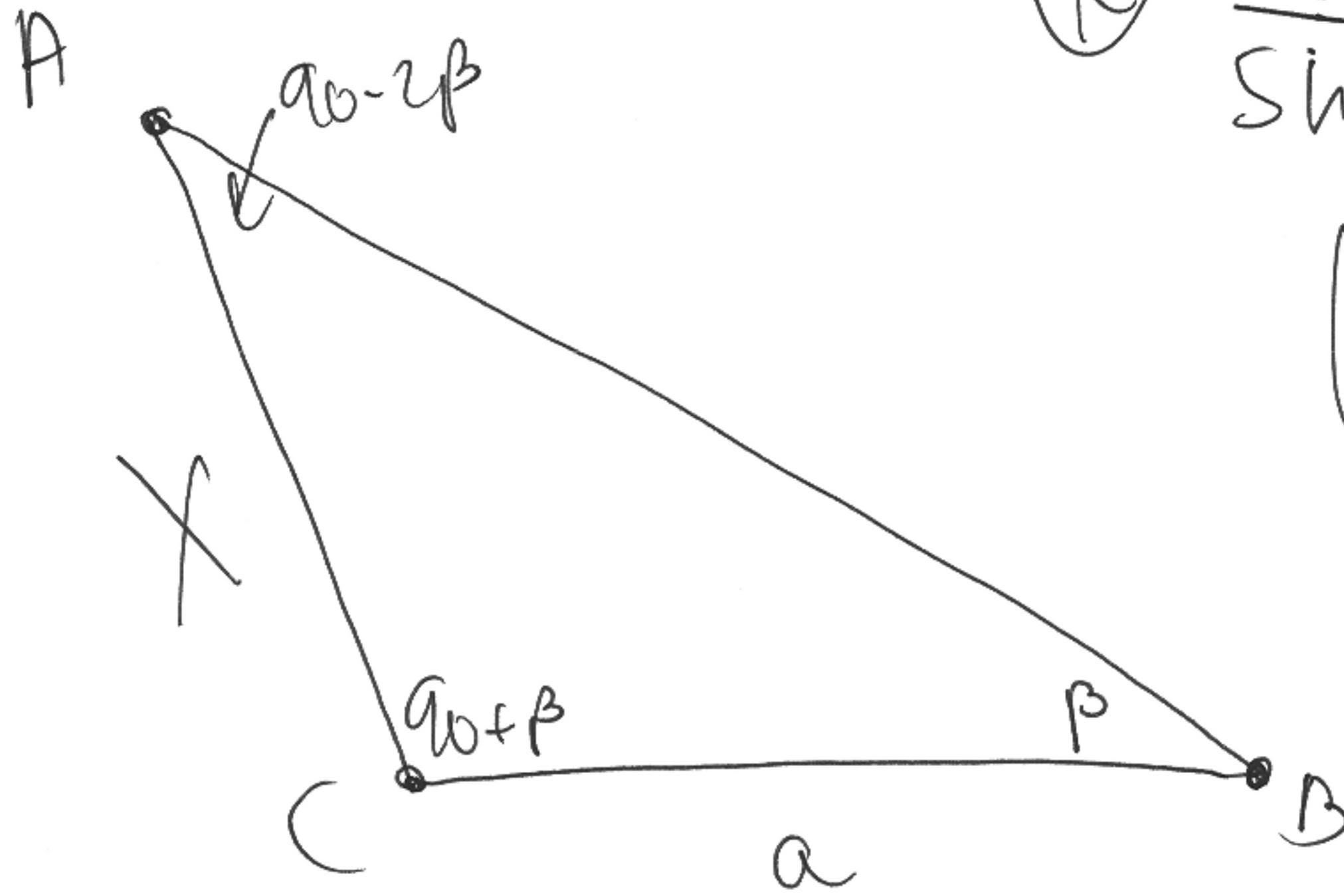
$$\pi - x = \pi - x + 2\pi k$$

ϕ



$$\boxed{0 + \pi k < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k}$$

6



7 $\frac{X}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(90 - 2\beta)}$

$X = \frac{a \sin \beta}{\cos 2\beta}$

8 $S = \frac{X - a \cdot \sin(90 + \beta)}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{2 \cos 2\beta} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\beta}{2 \cos 2\beta}$

$S = \frac{1}{4} a^2 \cdot \tan 2\beta \Rightarrow \frac{S}{a^2} = \frac{1}{4} \tan 2\beta$