מבחן טרימסטר ב' במתמטיקה

משך המבחן שלוש וחצי שעות. יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבונים! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

אם במכנה של ביטוי כלשהו מופיעים שורשים – יש להשתחרר מהאי-רציונליות במכנה.

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!

תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

יש להתחיל כל שאלה בדף חדש!

שאלה 1 (14%)

מנקודה O מעבירים $n+1$ קרניים כך שהזווית בין כל שתי קרניים שכנות היא $\frac{2\pi}{n}$.

על קרן אחת בוחרים נקודה A_0 כך ש- $A_0O=a$.

מנקודה A_0 מורידים אנך A_0A_1 על קרן סמוכה,

מנקודה A_1 מורידים אנך A_1A_2 על קרן סמוכה באותו כיוון וממשיכים באותה דרך.

מקבלים קו שבור.

7% א. הוכח שהקטעים $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots OA_n$ יוצרים סדרה גיאומטרית.

7% ב. מה אורכו של הקו השבור $A_0A_1A_2\ldots A_n$?

שאלה 2 (14%)

9% א. נתונה סדרה ע"י נוסחת נסיגה $a_1=7\ ;\ k=1,2,3,\ldots\ ,\ a_{k+1}-a_k=3k^2-9k+4$.

הוכח, שלכל n טבעי, a_n הוא מספר אי-זוגי.

5% ב. עבור אילו ערכים של a שטח התחום החסום על-ידי: **העקום** $a>0$, $f(x)=a+\frac{1}{ax^2}$, **ציר** x

והישרים $x=4$, $x=1$, הוא מינימלי?

שאלה 3 (20%)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3-ax^2-1}{x^2-1}$.

5% א. מצא את a עבורו הישר $y=x-3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה הנתונה.

ב. חקור את הפונקציה כאשר $a=0$:

1% 1. תחום הגדרה.

1% 2. נקודות חיתוך עם הצירים.

3% 3. אסימפטוטות.

2% 4. תחומי עליה וירידה.

1% 5. נקודות קיצון.

2% 6. צייר רְשׂוּמֶת (סקיצה) של הגרף.

5% ג. חשב את השטח הנמצא בין: גרף הפונקציה כאשר $a=0$,

והישרים $x-y+1=0$, $x=-3$, $x=-2$.

שאלה 4 (16%)

במעגל שרדיוסו R חסום משולש שווה-שוקיים ABC שבו $\sphericalangle B=\sphericalangle C=2\alpha$.

חוצה-זווית $\sphericalangle B$ חותך את המעגל בנקודה D.

המשך AD חותך את המשך BC בנקודה E.

8% א. חשב את AE באמצעות R ו- α.

8% ב. מצא את $\sin\alpha$ שעבורו אורך הקטע AE מקסימלי.

שאלה 5 (18%)

8% א. הוכח שהאי-שוויון $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x \geq 0$ מתקיים לכל x.

10% ב. פתור $\operatorname{ctg}^2 x \geq \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

שאלה 6 (18%)

במשולש ABC $\sphericalangle C - \sphericalangle B = \frac{\pi}{2}$, $BC = a$.

9% א. חשב את האורך של הצלע AC באמצעות a ו- $\sphericalangle B$.

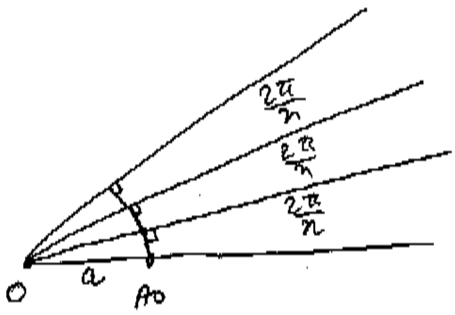
9% ב. הוכח כי $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$ כאשר S הוא שטח המשולש ABC.

בהצלחה!

19.09.14 (א)

$\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$

$\boxed{4<n}$



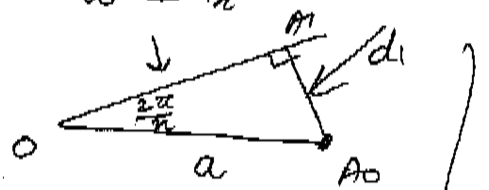
(ב)

$q = \frac{OA_n}{OA_{n-1}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

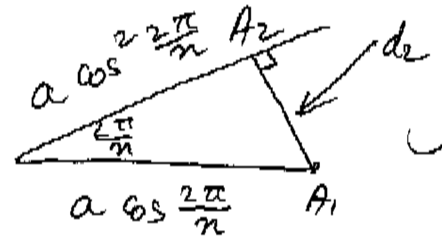
לכל
n טבעי
הסדרה
הנדסית.

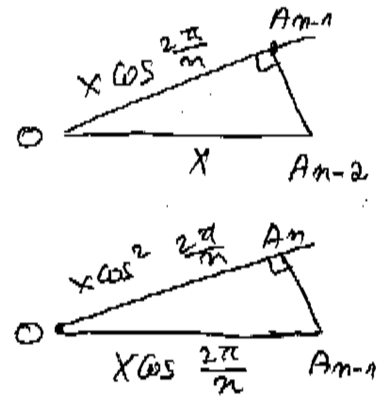
$S = d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n$

$a \cdot \cos\frac{2\pi}{n}$ $a \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$



[illegible]





[illegible]

② $d_1 = a \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

$d_2 = a\cos\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

$d_3 = a\cos^2\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

$\vdots$

$\cos\frac{2\pi}{n} \neq 1$

$\frac{2\pi}{n} = 2\pi K$

$\frac{1}{n} = K$

¡min!

$$\frac{d_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos^n\frac{2\pi}{n}-1\right)}{\cos\frac{2\pi}{n}-1}$$

$$\frac{a\cdot\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos^n\frac{2\pi}{n}-1\right)}{\cancel{1}-\cancel{2}\sin^{2}\frac{\pi}{n}-\cancel{1}} =$$

$$\frac{a\cos\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^n\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$S = \boxed{a\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos^n\frac{2\pi}{n}\right)}$$

בדיקה: נניח ונציב $(n>4)$ 1+5 הרגיל

$$n=5 \Rightarrow \alpha=\frac{2\pi}{5}=\frac{360}{5}=72^{\circ}$$

(נעזרת מחשבון).

$$S'=a\cot(36)(1-\cos^5 72)=\underline{\underline{1.372\,a}}$$

$$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5=$$

$d_1 \to a\sin 72$

$d_2 \to a\cos 72\sin 72$

$d_3 \to a\cos^2 72\sin 72$

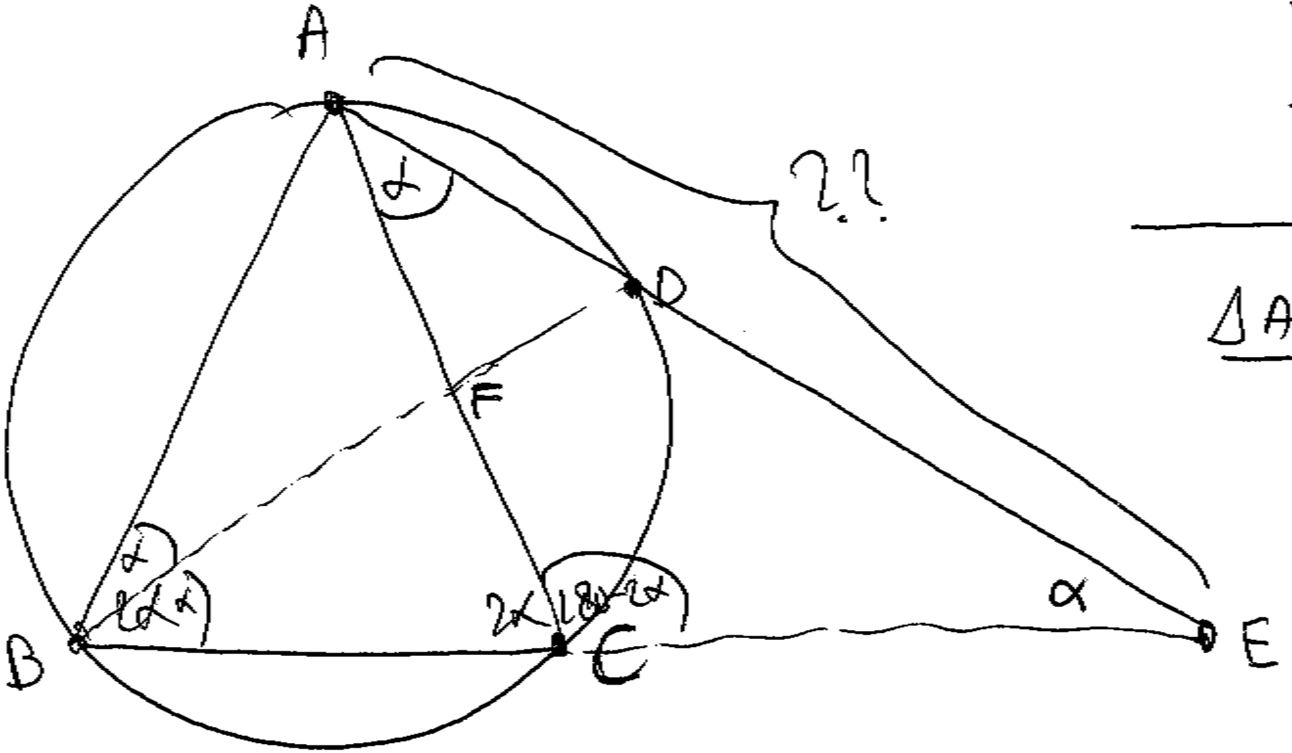
$d_4 \to a\cos^3 72\sin 72$

$d_5 \to a\cos^4 72\sin 72$

$$\sin 72\,(1+\cos 72+\cos^2 72+\dots+\cos^4 72)$$

$$\underline{\underline{1.372\,a}}$$

4



ΔABC:

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = 2R$$

ΔACE: $$\frac{AE}{\sin 2\alpha} = \frac{2R\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$AE = \frac{2R(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{8R\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 8R\sin\alpha(1-\sin^2\alpha$$

$$\boxed{AE = 8R(\sin\alpha - \sin^3\alpha)}$$

$$AE' = \cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha(1-3\sin^2\alpha) = 0$$

$\cos\alpha = 0$

$\alpha = 90$

ϕ

$\sin\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ לא הגיוני

אז α חדה [illegible]

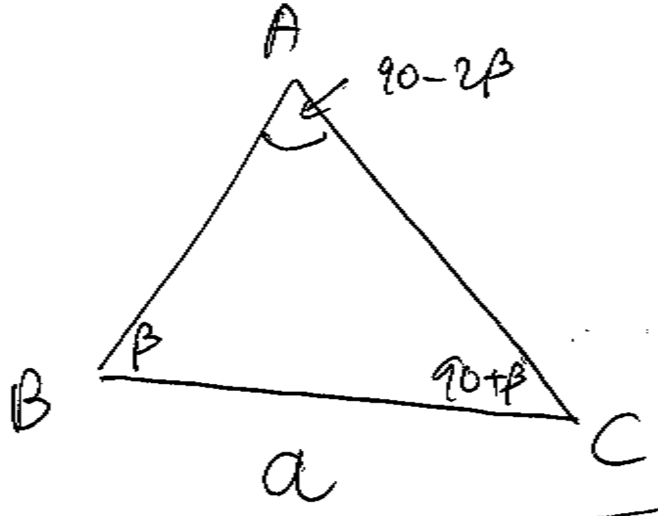
MAX

$$AE'' = -\sin\alpha\,(1 - 3\sin^2\alpha) + \cos\alpha\,(-3\cdot 2\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha)$$

$$AE''_{\substack{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - 3\cdot\frac{1}{3}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,(-6)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{\text{שלילי}} < 0$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(6) $\angle B = \beta$ $\gamma - \beta = 90 \Rightarrow \gamma = 90 + \beta$



(k) $\dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin(90-2\beta)} \Rightarrow AC = \dfrac{a\sin\beta}{\cos 2\beta}$

(2) $\angle B = \beta = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{4a^2\sin\beta\cos\beta}{2\cos 2\beta\cdot a^2}\right) =$

$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\cdot 2\sin\beta\cos\beta}{\cos 2\beta}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2\beta)$

$\frac{1}{2}\cdot 2\beta = \underline{\underline{\beta}}$

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sin\beta\sin(90+\beta)}{2\sin(90-2\beta)} =$

$\boxed{\dfrac{a^2\sin\beta\cos\beta}{2\cos 2\beta}} =$

09-19-'11 03:51 FROM-
T-102 P0006/0006 F-302

2

א

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$$

בדיקה: $a_1 = 7 \Rightarrow$ אי זוגי

הנחה: $a_n \to$ אי זוגי

צ"ל: $a_{n+1} \to$ אי זוגי

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$$

a_n: אי זוגי לפי ההנחה

ללא אינדוקציה

$$3n^2 - 3n - 6n - 6 + 10$$

$$3n(n-1) - 6(n-1) + 10$$

$$\underbrace{3(n-1)(n-2)}_{\text{שני מספרים סמוכים מכפלתם בהכרח זוגית } (n-1)(n-2)} + \underbrace{10}_{\text{זוגי}}$$

מ.ש.ל

ניתן להוכיח כי:

$3n^2 - 9n + 4 =$ זוגי

אפשר כמובן בעזרת אינדוקציה...

אפשר גם ללא אינדוקציה...

בעזרת אינדוקציה:

בדיקה ✓

הנחה ✓

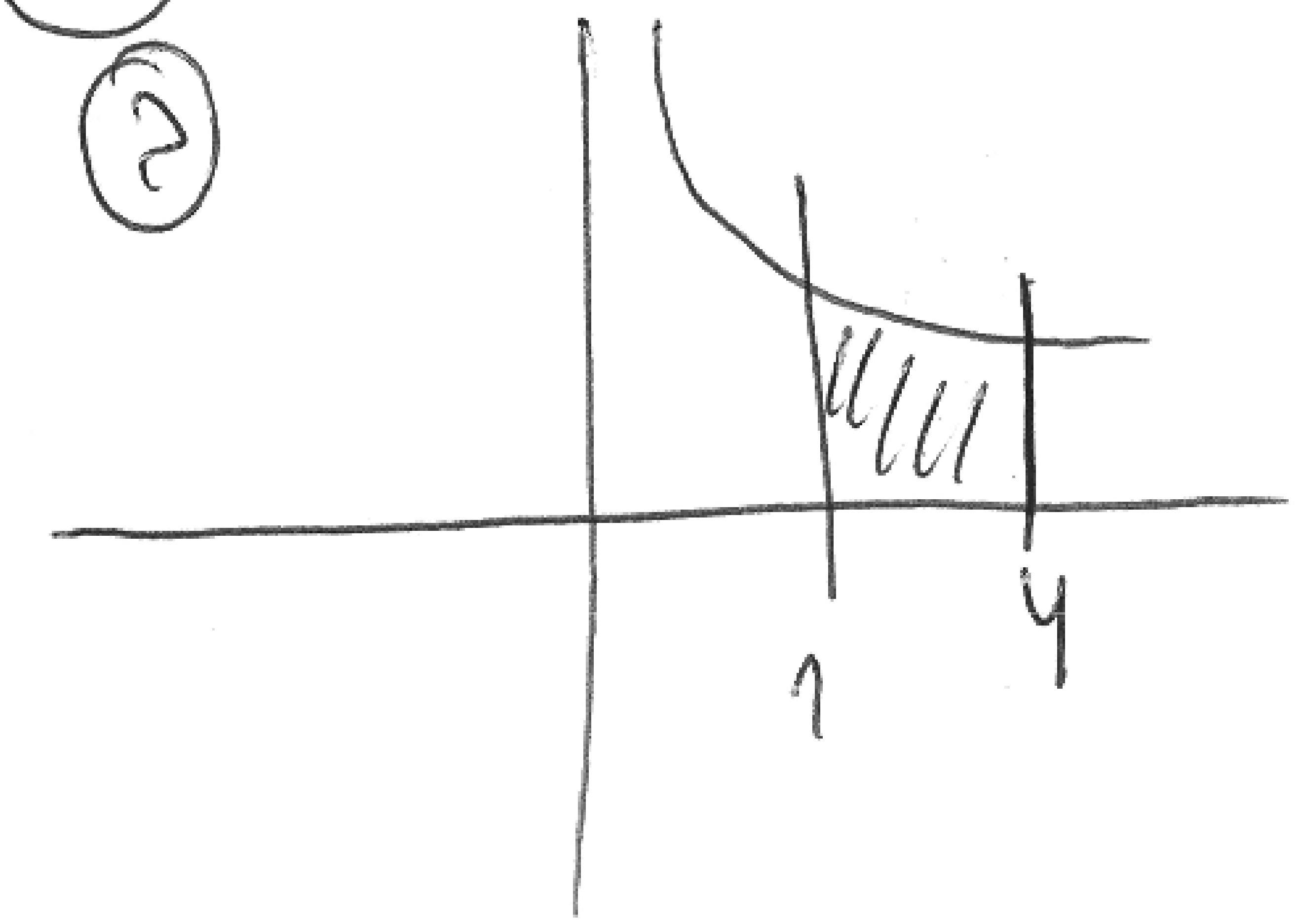
צ"ל: $3(n+1)^2 - 9(n+1) + 4 =$

$$\underbrace{3n^2 - 9n + 4}_{\text{זוגי לפי ההנחה.}} + \underbrace{6n + 3 - 9}_{6n-6 \text{ בוודאות זוגי}}$$

מ.ש.ל

2

2



$\frac{1}{a}\cdot x^{-2}$

$$\int_1^4 a+\frac{1}{ax^2}\,dx = ax+\frac{1}{a}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4$$

$$ax-\frac{1}{ax}\Big|_1^4 = \left(4a-\frac{1}{4a}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$3a+\frac{1}{a}-\frac{1}{4a} = 3a+\frac{3}{4a}$$

$$3\left(a+\frac{1}{4a}\right)$$

$$\left(a+\frac{1}{4a}\right)' = 1-\frac{1}{4a^2}=0$$

$$4a^2=1$$

$$a=\pm\frac{1}{2}$$

$$a>0$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$(\ )'' = 0-\frac{1}{4}\cdot(-2)\cdot a^{-3} = \frac{1}{2a^3}>0$$

Min

3

c

$$y=\frac{x^3-ax^2-1}{x^2-1}$$

$$y = x-3$$

$$m=1$$

$$n=-3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-ax^2-1}{x^2-1}-x=$$

$$\frac{x^3-ax^2-1-x^3+x}{x^2-1}=$$

$$\frac{-ax^2+x-1}{x^2-1}=-a=-3$$

$$\boxed{a=3}$$

d

$a=0$

1) $$y=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

$\boxed{(1,\frac{3}{2})}$ חור

$\boxed{x\neq 1 \quad x\neq -1}$

$$\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}$$

$$x+\frac{1}{x+1}$$

2) $(0,1)$

3) $$\lim_{x\to 1^+} x+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{(1,\tfrac{3}{2}) \text{ חור}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} x+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

3)

$$\lim_{x\to -1^-} x+\frac{1}{x+1} = -\infty$$

-1.001

$$\lim_{x\to -1^+} x+\frac{1}{x+1} = \infty$$

-0.999

$$\boxed{x=-1}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x}+\frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} x+\frac{1}{x+1}-x = 0$$

$$\boxed{y = x}$$

(4+5)

$$y' = 1+(-1)(x+1)^{-2} = 0$$

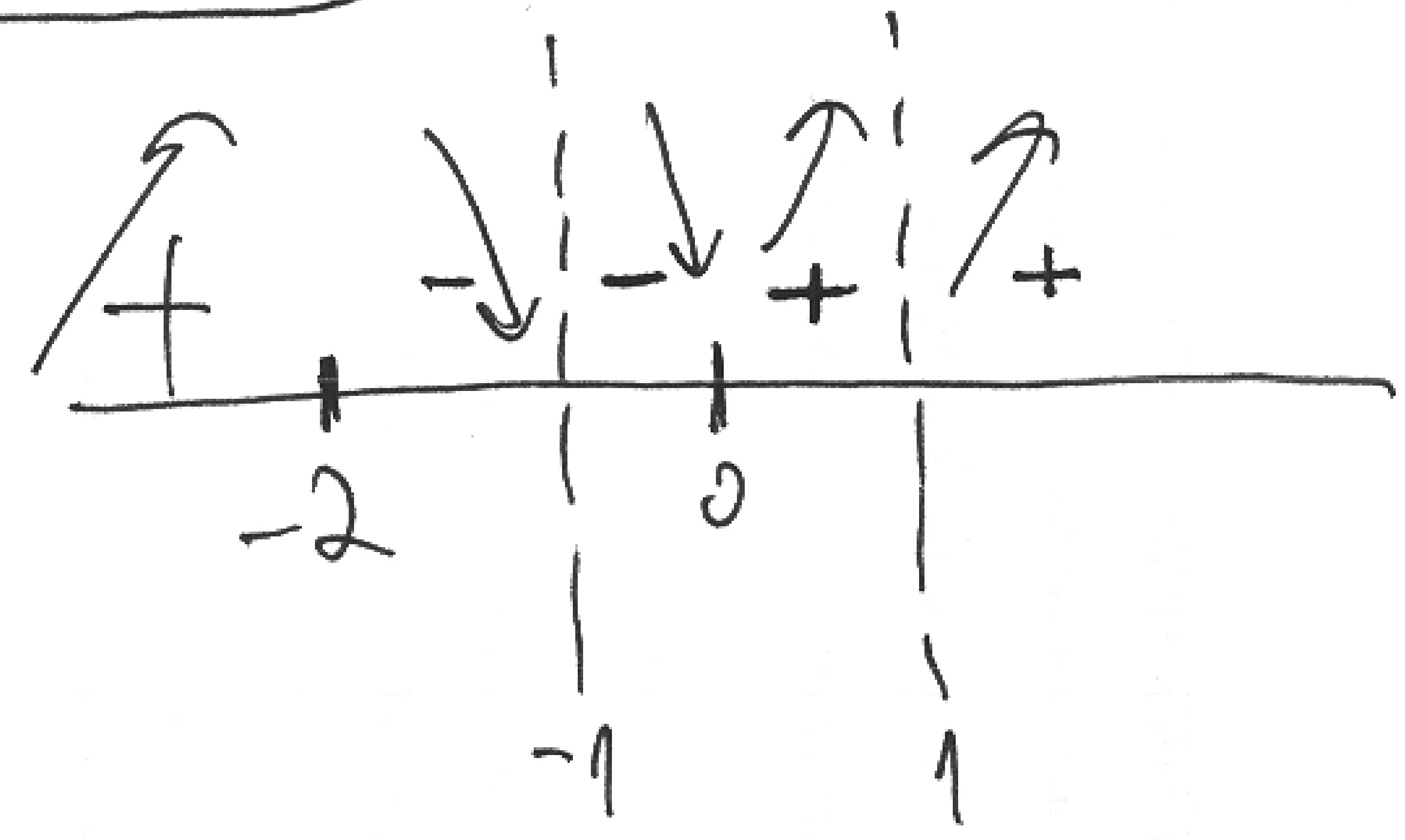
$$1-\frac{1}{(x+1)^2} = 0 \qquad \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = 0$$

$$(x+1)^2 = 1$$

$x+1 = 1 \qquad x+1 = -1$

$x = 0 \qquad x = -2$

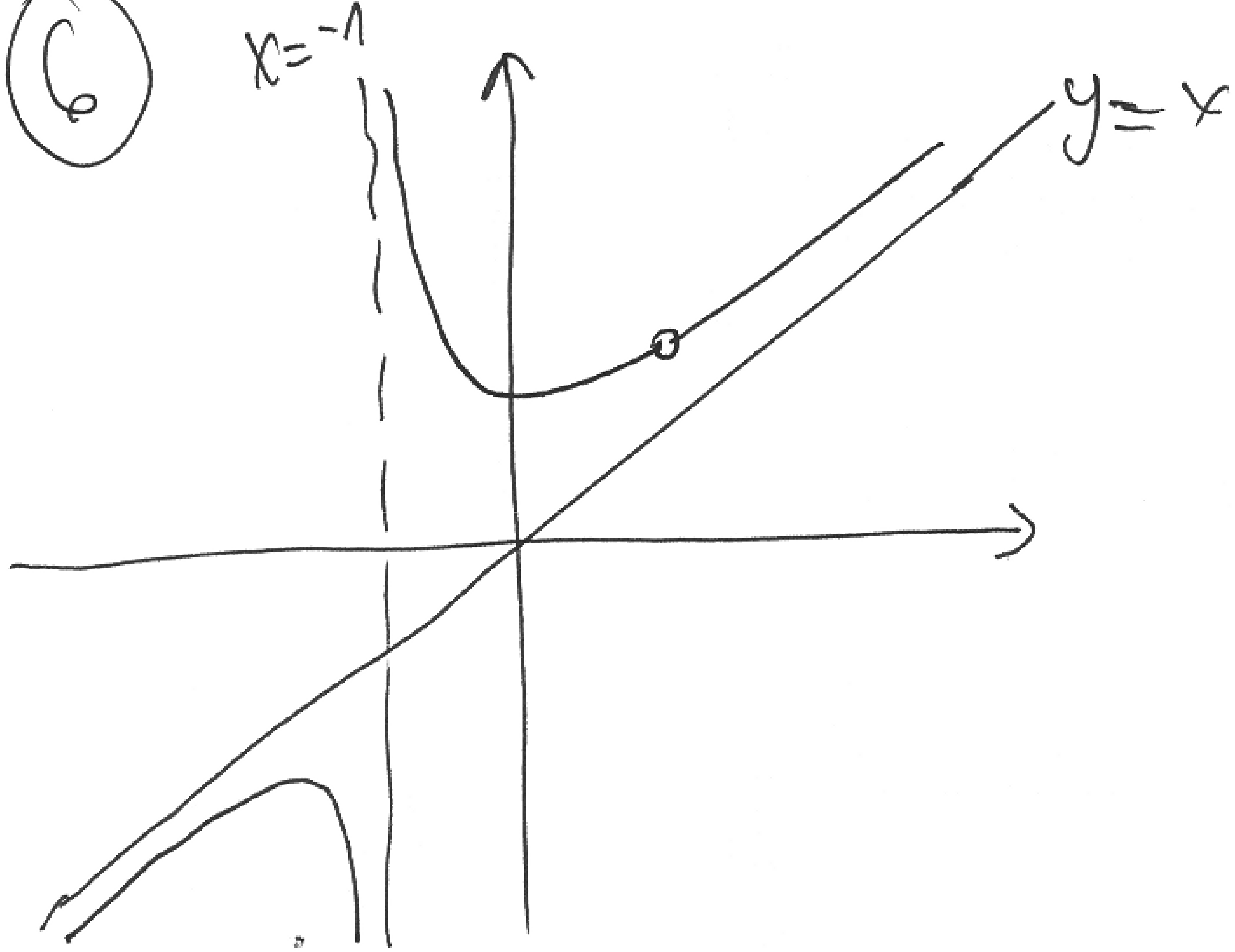
$\boxed{MIN\ (0,1)}$ $\boxed{(-2,-3)\ MAX}$



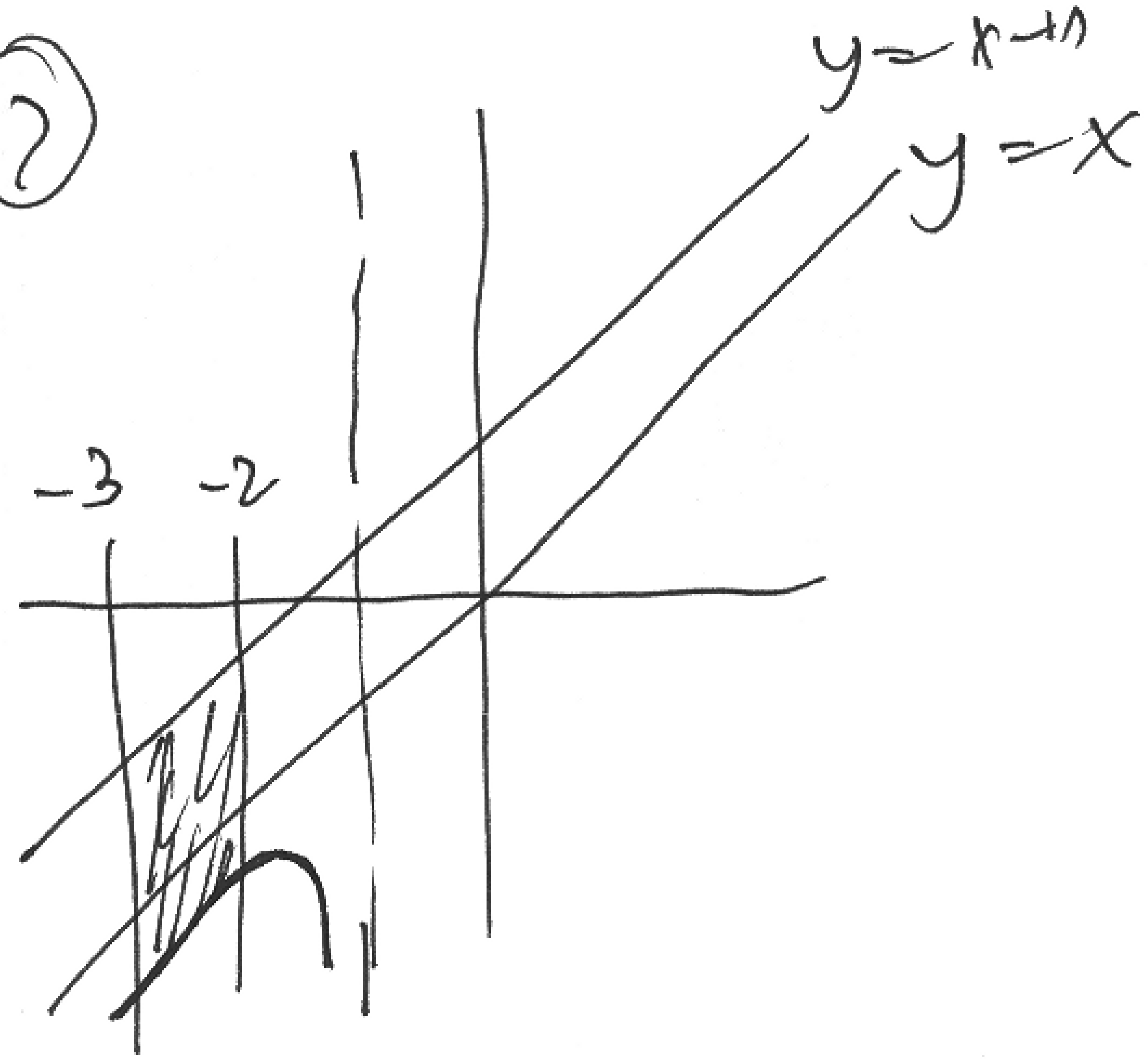
$x<-2,\ 0<x<1,\ x>1$ עולה:

$-2<x<-1,\ -1<x<0$ יורד:

6



7



$$\int_{-3}^{-2} x+1-x-\frac{1}{x+1}\,dx = x-\ln|x+1|$$

$$(-2-\ln|-1|)-(-3-\ln|-2|)=$$

$$\boxed{1+\ln 2}$$

5 (c)

$$(1+\sin x) + \cos x(1+\sin x) \geq 0$$

$\sin x + 1 \geq 0$

$\cos x + 1 \geq 0$

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \geq 0$$

Ισχύει

(d)

$$\underbrace{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}_{\geq 0} \geq \underbrace{\frac{1+\sin x}{1+\cos x}}_{\geq 0}$$

$\sin x \neq 0$

$\cos x \neq -1$

$$\cos^2 x(1+\cos x) \geq \sin^2 x(1+\sin x)$$

$$\cos^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x - \sin^3 x \geq 0$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0$$

$$(\cos x-\sin x)(\underbrace{1+\cos x\sin x+\cos x+\sin x}_{\geq 0})\geq 0$$

לפי סעיף ג

$\cos x-\sin x\geq 0$

$\cos x\geq \sin x$

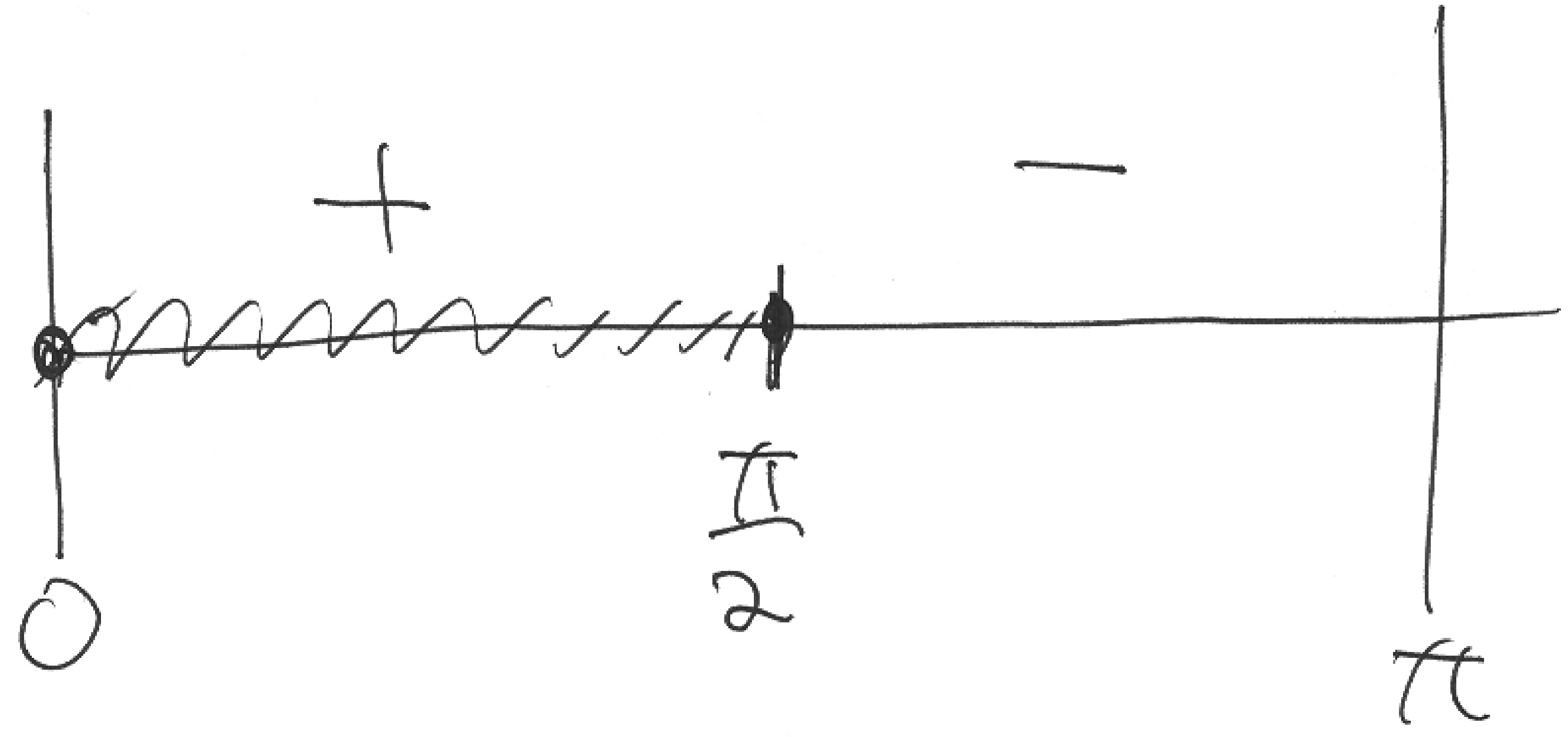
$\sin(\pi-x)\geq \sin x$

$\pi-x=x+2\pi k$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+\pi k=x}$

$\pi-x=\pi-x+2\pi k$

ϕ



$\boxed{0+\pi k<x\leq \frac{\pi}{2}+\pi k}$