20.04.2012

המרכז לחינוך קדם-אקדמי

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים.

יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת!!

מבחן טרימסטר ב׳ במתמטיקה

משך המבחן 3.5 שעות. יש לפתור את כל השאלות!

אין להשתמש במחשבונים! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!

<u>בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!</u>

<u>כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!</u>

<u>כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!</u>

שאלה 1 (18%)

12% א. נתונה סדרה $a_n = 2n-1\ ,\ n = 1,2,\cdots$

1. הוכח שהסדרה הנ״ל חשבונית.
2. מצא את כל המספרים הטבעיים שעבורם מתקיים האי-שוויון $S_3 + S_{n-2} + S_{n-1} < S_{n+2} + a_1$ עבור הסדרה שבסעיף א׳.
   (S_k - מסמן את סכום k האיברים הראשונים של הסדרה).

6% ב. הסכום של טור גיאומטרי אינסופי מתכנס הוא 8.
הסכום של החזקות השלישיות של כל אחד מאיבריו הוא $\frac{512}{7}$.
רשום את שלושת האיברים הראשונים של הטור.

שאלה 2 (14%)

6% א. הוכח כי לכל n טבעי ולכל $a>0\ ,\ b>0$ מתקיים $2^{n-1}\left(a^n+b^n\right) \ge \left(a+b\right)^n$.

8% ב. במשולש ABC הזוויות $\sphericalangle BAC = \alpha\ ,\ \sphericalangle BCA = \gamma$ **<u>חדות</u>**, גובה המשולש $BE = h$.
מעגל שקוטרו BE חותך את AB בנקודה D ואת BC בנקודה M.
הוכח ששטח המרובע $BDEM$ הוא $\frac{1}{2}h^2\cos\left(\alpha-\gamma\right)\sin\left(\alpha+\gamma\right)$.

שאלה 3 (18%)

חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{|x|}{x^2-8x+12}$.

1. תחום הגדרה.
2. נקודות חיתוך עם הצירים.
3. אסימפטוטות.
4. תחומי עליה וירידה.
5. נקודות קיצון.
6. צייר רְשוּמֶת (סקיצה) של הגרף.

שאלה 4 (18%)

12% א. הישר $2x+y=7$ משיק לפרבולה $y=-x^2+ax+3$, $a>0$.
חשב את השטח המוגבל בין הפרבולה , בין הישר הנ״ל ובין ציר X.

6% ב. חשב: $\int_{-3}^{-2}\frac{x^3-x+1}{x+1}dx$.

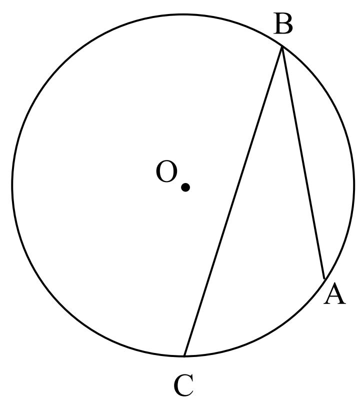
שאלה 5 (18%)

10% א. פתור: $\frac{1}{\sin 5x}-\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ בקטע $[0,2\pi]$.

8% ב. הוכח כי $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{11}{27}$ עבור כל ערכי x שהם פתרונות של המשוואה $\cos x-\sin x=\frac{1}{3}$.
(רמז: כדי להוכיח את הטענה אין צורך בפתרון מלא של המשוואה)

שאלה 6 (14%)

מנקודה B שעל המעגל שמרכזו O מעבירים שני מיתרים AB ו- BC (ראה איור)
כך ש- $\sphericalangle BAO=\beta$, $\sphericalangle AOC=\alpha$.
OA חותך את BC בנקודה D.



10% א. הוכח כי $\frac{AD}{DO}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta}{\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

4% ב. נתון ש- $\alpha=20^\circ$. מצא את תחום ההשתנות של β כדי שלסעיף א׳ יהיה פתרון.

בהצלחה!

שאלה 1

א

$a_n = 2n-1 \qquad n=1,2,3\dots \qquad \boxed{a_1=1}$

1

$d=2$

$a_{n+1} = 2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$

$a_{n+1}-a_n = (2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1 = 2$

הפרש קבוע בין שני איברים סמוכים ולכן סדרה חשבונית

2

$S_3 + S_{n-2} + S_{n-1} < S_{n+2} + a_1 \qquad n \geq 3$

$\cancel{a_1} + a_2 + a_3 + \cancel{S_n} - a_n - a_{n-1} + S_n - a_n < \cancel{S_n} + a_{n+1} + a_{n+2} + \cancel{a_1}$

$a_2 + a_3 - 2a_n - a_{n-1} + S_n < a_{n+1} + a_{n+2}$

$$\overbrace{3+5}^{8} - 2\left(\overbrace{1+(n-1)\cdot 2}^{2n-1}\right) - \left(\overbrace{1+(n-2)\cdot 2}^{2n-3}\right) + \frac{n}{2}\left(\overbrace{2+(n-1)\cdot 2}^{2n}\right) < 1+2n+1+(n+1)2$$

$$8-4n+2-2n+3+n^2<4+4n$$

$$n^2-6n+13-4-4n<0$$

$$n^2-10n+9<0$$

$$(n-9)(n-1)<0$$

$+ \quad - \quad +$

$1 \qquad 9$

$$\begin{cases} 1<n<9 \\ n\geq 3 \end{cases}$$

$$3\leq n<9$$

$$\underbrace{n=3,4,5,6,7,8}$$

$\boxed{\text{6 מספרים טבעים}}$

שאלה 7

ק

$$\frac{a_1}{1-q} = 8 \qquad a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{512}{7}$$

$$a_1 = 8(1-q) \longrightarrow \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{512}{7}$$

$$\frac{\cancel{8^3}(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{\cancel{512}}{7}$$

$$7(1-q)^2 = 1+q+q^2$$

$$7-14q+7q^2 = 1+q+q^2$$

$$6q^2-15q+6=0$$

$$2q^2-5q+2=0$$

$$2q^2-4q-q+2=0$$

$$2q(q-2)-1(q-2)=0$$

$$(2q-1)(q-2)$$

$q=2$ לא כי q

$$q=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\boxed{4,\ 2,\ 1}$$

$512 = 2^9$

$(2^3)^3 = 8^3$

ב

<u>שאלה ב:</u>

$a>0 \qquad b>0$

$$2^{n-1}(a^n+b^n) \geq (a+b)^n$$

<u>בדיקה:</u>

$n=1 \Rightarrow 2^0(a+b) \geq (a+b)^1 \Rightarrow a+b = a+b$ ✓

$n=2 \Rightarrow 2^1(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2$

$a^2-2ab+b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$ ✓

<u>הנחה:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו

$$2^{n-1}(a^n+b^n) \geq (a+b)^n$$

צ"ל: שהטענה נכונה עבור n+1 :

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1}) \geq (a+b)^{n+1} = \underbrace{(a+b)^n}(a+b)$$

נקח את
ההנחה
ונחמיר

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1}) \geq 2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b)$$

$$2\cdot\cancel{2^n}(a^n\cdot a+b^n\cdot b) \geq \cancel{2^n}(a^n\cdot a+b^n\cdot b+a^n\cdot b+b^n\cdot a)$$

$$a^n\cdot a+b^n\cdot b \geq a^n\cdot b+b^n\cdot a$$

$$a^n(a-b) \geq b^n(a-b)$$

$$\boxed{(a-b)(a^n-b^n) \geq 0}$$

צ"ל:

נשתמש בנוסחא

$$a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}\right)}_{\text{כולו חיובי}}$$

$a,b>0$

נקבל:

$$(a-b)(a-b)\cdot(\text{חיובי})\geq 0$$

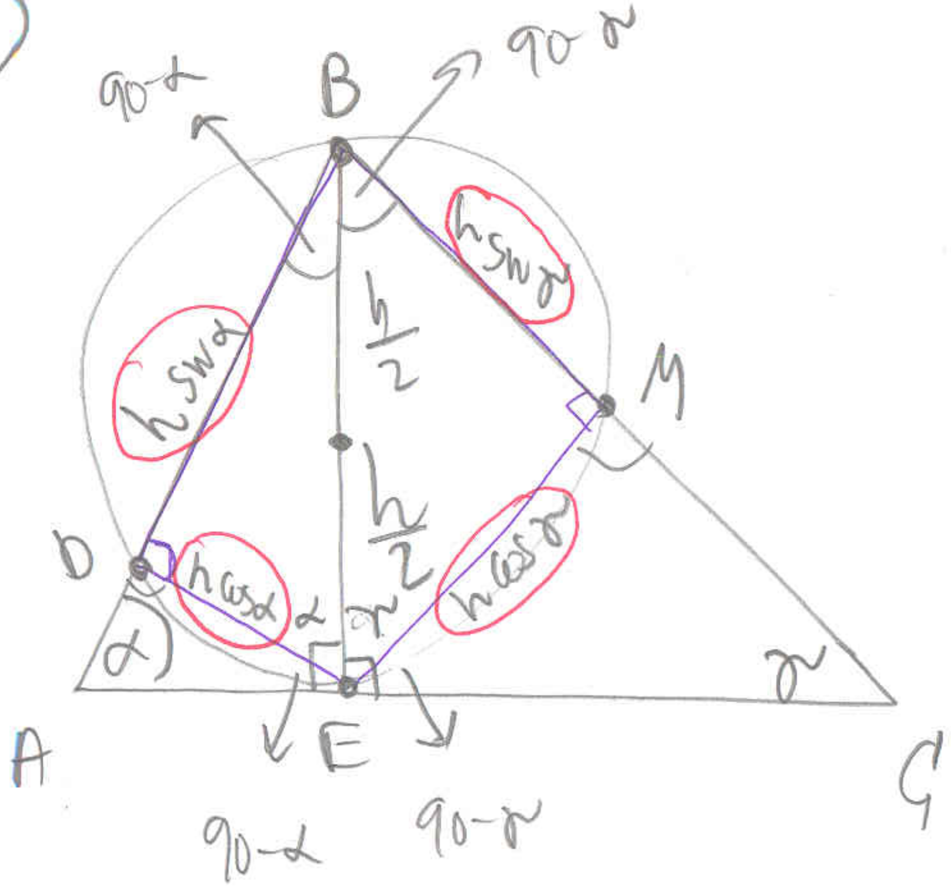
$$(a-b)^2\cdot(\text{חיובי})\geq 0$$

$$\left(\begin{matrix}\text{חיובי}\\ \text{או אפס}\end{matrix}\right)\cdot(\text{חיובי})\geq 0$$

מ.ש.ל

שאלה 2:

(ב)



$\measuredangle D = \measuredangle M = 90$

היקפיות על הקוטר.

$$S = \frac{h^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2} + \frac{h^2 \cdot \sin\gamma\cos\gamma}{2}$$

$$= \frac{h^2}{2}\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\gamma}{2}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}h^2(\sin 2\alpha + \sin 2\gamma) = \frac{1}{4}\cdot h^2 \cdot 2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}h^2 \sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)}$$

שאלה 3:

$y=\dfrac{x}{x^2-8x+12}$ $\boxed{x>0}$	אם	$y=\dfrac{-x}{x^2-8x+12}$ $\boxed{x\le 0}$	
$x^2-8x+12\neq 0$ $(x-2)(x-6)\neq 0$ $\boxed{x\neq 2}$ $\boxed{x\neq 6}$		כל x	1
אין חיתוך עם הצירים		$(0,0)$	2
$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{(x-2)(x-6)}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^-}=+\infty$ $\boxed{x=2}$ אנכית		אין אנכית $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x(x^2-8x+12)}=$ $\dfrac{-1}{x^2-8x+12}=0$	3

$$\lim_{x \to 6^-} = -\infty$$

$$\boxed{x = 6}$$

אנכית

$$\lim_{x \to 6^+} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x(x^2-8x+12)} = \frac{-1}{x^2-8x+12} = 0$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2-8x+12} = \text{-- --} = 0$$

כמו
קודם

$$\boxed{y = 0 \quad \text{אופקית}}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2-8x+12} =$$

$$\frac{x^2\left(\frac{-1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}\right)} = \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

$$\boxed{y = 0 \quad \text{אופקית}}$$

$$y' = \frac{1(x^2-8x+12) - x(2x-8)}{(x^2-8x+12)^2}$$

$$\frac{x^2-8x+12-2x^2+8x}{(x^2-8x+12)^2} =$$

$$\boxed{\frac{12-x^2}{(\ )^2} = 0}$$

$(2\sqrt{3},\quad)$ $(-2\sqrt{3},\quad)$

לא בתחום

$x = 2\sqrt{3}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{12-16\sqrt{3}+12} \text{-----} = \frac{-(2+\sqrt{3})}{4}$$

$$\boxed{\left(2\sqrt{3}, \frac{-(2+\sqrt{3})}{4}\right) \quad \text{MAX}}$$

4+5

$$\boxed{y' = -\left(\frac{12-x^2}{(\ )^2}\right) = 0}$$

$(2\sqrt{3},\quad)$ $(-2\sqrt{3},\quad)$

לא בתחום

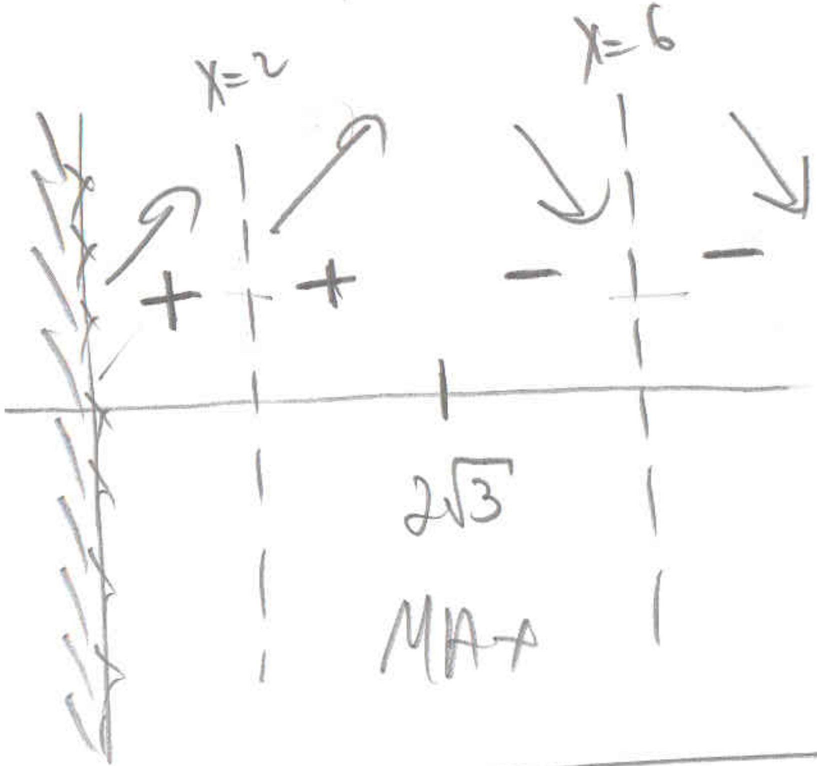
$x = -2\sqrt{3}$

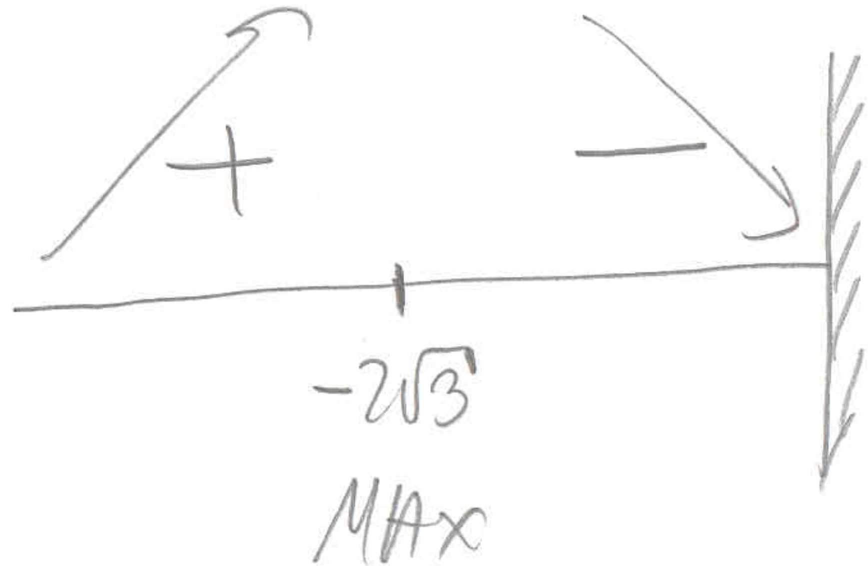
$$\frac{+2\sqrt{3}}{12+16\sqrt{3}+12} = \frac{+2\sqrt{3}}{24+16\sqrt{3}} = \frac{+\sqrt{3}}{12+8\sqrt{3}}$$

$$\frac{+\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})}{4(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})} = \frac{+\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})}{4(9-12)}$$

$$\frac{+\cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-2)}{-4\cdot 3} = \frac{-(\sqrt{3}-2)}{4}$$

$$\left(2\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{MAX}$$



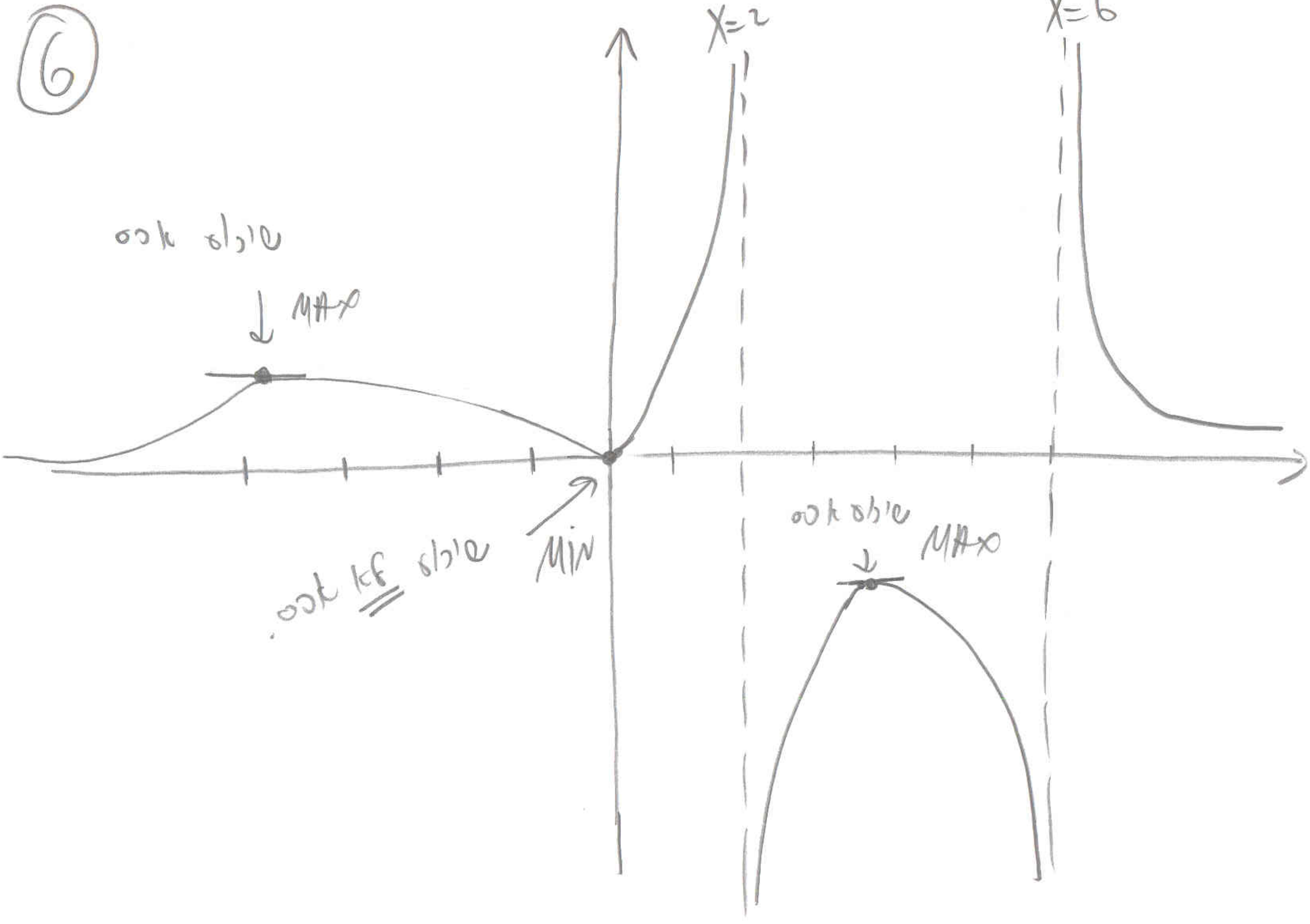


עולה: $x<-2\sqrt{3}$, $0<x<2$, $2<x<2\sqrt{3}$

יורדת: $-2\sqrt{3}<x<0$, $x>6$, $2\sqrt{3}<x<6$

לגרף את 8 $(0,0)$ קיצון מסוג MIN

6



א

שאלה 4'

$$\begin{cases} y = -2x+7 & m=-2 \\ y = -x^2+ax+3 & y' = -2x + a = -2 \end{cases}$$

$a = +2x-2$

$-2x+7 = -x^2+ax+3 \leftarrow$

$-2x+7 = -x^2+(2x-2)x+3$

$-\cancel{2x}+7 = -x^2+2x^2-\cancel{2x}+3$

$4 = x^2$

$\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ a=2 \end{matrix}}$ $\quad$ $\cancel{x=-2}$, $\cancel{a=-4}$, $\cancel{a>0}$

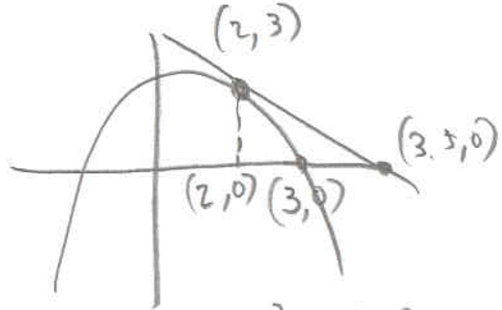
$(2,+3)$ נקודת השקה

$a = 2$

$y = -x^2+2x+3$

$-(x^2-2x-3)$

$-(x-3)(x+1)$



$$\int_2^3 -x^2+2x+3 = -\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x = 9-\frac{22}{3} = \frac{5}{3} \;//$$

$$\triangle = \frac{1.5\cdot 3}{2} = \frac{9}{4} \;//$$

$$\frac{9}{4}-\frac{5}{3} = \frac{7}{12}$$

7

$$\int \frac{x^3-x+1}{x+1} = \int x^2 - x + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \Big|_{-3}^{-2}$$

$$\left(\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} + \ln 1\right) - \left(\frac{-27}{3} - \frac{9}{2} + \ln 2\right)$$

$$\frac{-8}{3} - 2 + 0 + 9 + \frac{9}{2} - \ln 2$$

$$\boxed{\frac{53}{6} - \ln 2}$$

$$\frac{x^2(x+1) - x^2 - x + 1}{x+1}$$

$$x^2(x+1) - x(x+1) + 1$$

$$x^2 - x + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{-8}{3} - 2 + 9 + \frac{9}{2}$$

$$\frac{-16 - 12 + 54 + 27}{6} = \frac{53}{6}$$

ג

$$\boxed{0 \le x \le 2\pi}$$

תחום

$\sin 5x \neq 0 \quad x = 36k$

$\sin x \neq 0 \quad x \neq 180k$

$\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 180 + 360k$

$$\frac{1}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin 5x} = \frac{\cos x \cos\frac{x}{2} + \sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin x}$$

$$\cos\frac{x}{2}\sin x = \sin 5x \cos\frac{x}{2}$$

$$\cancel{\cos\frac{x}{2}}(\sin x - \sin 5x) = 0$$

$$\sin x = \sin 5x$$

$x = 5x + 360k$

$-4x = 360k$

$x = 90k$

$x = 180 - 5x + 360k$

$6x = 180 + 360k$

$x = 30 + 60k$

~~$x=0$~~	$x=30$
$x=90$	$x=90$
$x=270$	$x=150$
~~$x=180$~~	$x=210$
~~$x=360$~~	$x=270$
	$x=330$

$\boxed{30, 90, 150, 210, 270, 330}$

(?) $\cos x - \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\ )^2$ $\quad (\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{9}$

x פתרון המשוואה

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{11}{27}$ [illegible]

$$1 - \frac{1}{9} = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{8}{9} = 2\sin x \cos x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

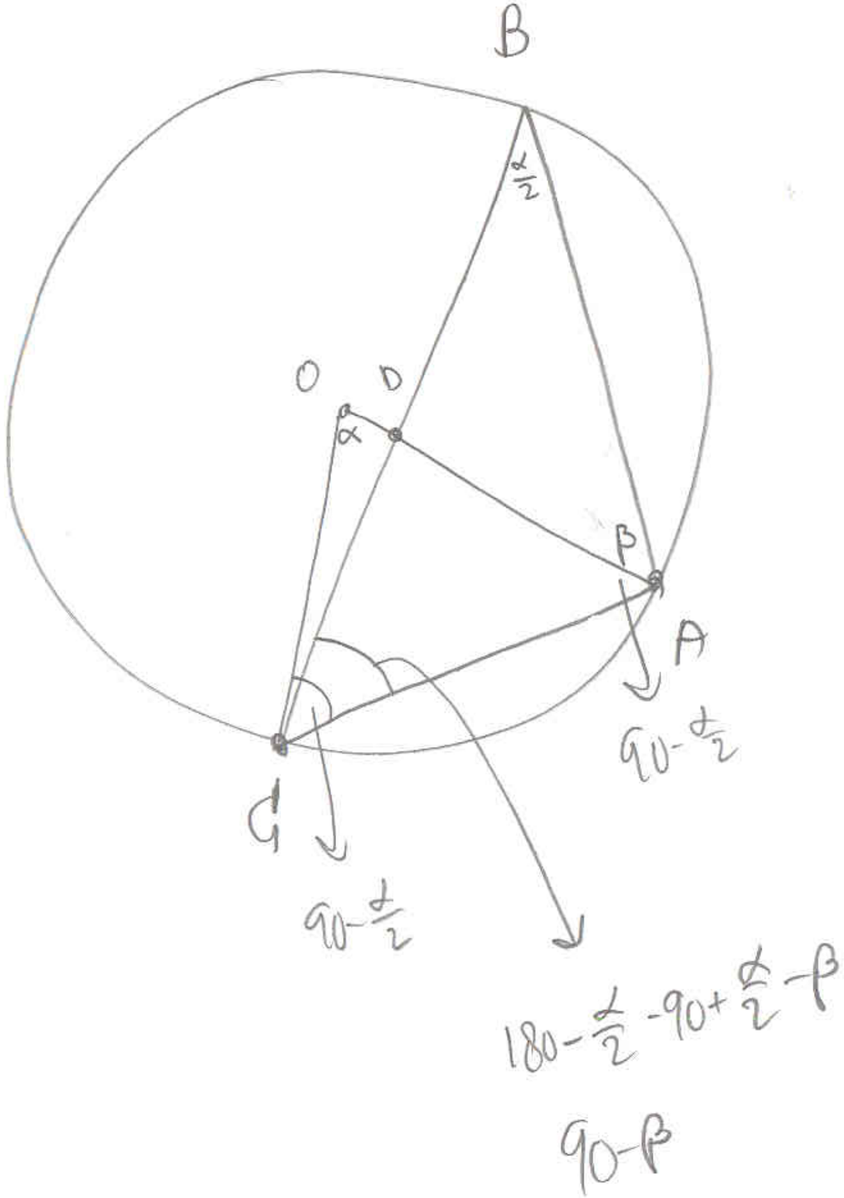
$$\frac{4}{9} = \sin x \cos x \quad / (\ )^2$$

$$1 \cdot \left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right)$$

$$\frac{16}{81} = \sin^2 x \cos^2 x$$

$$1(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = ???$$

$$1 - \frac{3 \cdot 16}{81} = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$$



שאלה ט'

ג'

$$\frac{AD}{DO} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta}{\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

ΔBAC: $\quad \dfrac{AB}{\sin(90-\beta)} = 2R$

$$AB = 2R\cos\beta$$

ΔBDA: $\quad \dfrac{2R\cos\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)} = \dfrac{AD}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$AD = \frac{2R\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$$

$$\frac{AD}{DO} = \frac{AD}{R-AD} = \frac{\dfrac{2R\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}}{R-\dfrac{2R\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}} = \frac{2R\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{R\left(\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)-2\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{AD}{DO} = \frac{2\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta-2\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$$

$$\boxed{\frac{AD}{DO} = \frac{2\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\beta-\frac{\alpha}{2})}}$$

$\alpha = 20^\circ$

$$\frac{AD}{DO} = \frac{2\cdot\sin 10\cdot\cos\beta}{\sin(\beta-10)} > 0$$

$$\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-10)} > 0$$

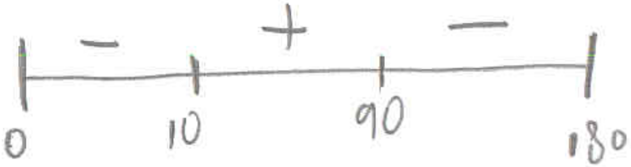
$\cos\beta = 0 \quad \beta = \frac{\pi}{2} = 90$

$\sin(\beta-10) = 0$

$\beta - 10 = 0 \quad \beta = 10$

$\beta - 10 = 180$

$\beta = 190$



$$\boxed{10 < \beta < 90}$$