

מבחן אמצע במתמטיקה – סמסטר שני

הוראות כלליות:

- יש לקרוא היטב את השאלות.
- יש לענות על כל השאלות. סדר התשובות אינו חשוב.
- ליד כל שאלה מצויין ערכה הכולל בנקודות. בנוסף, ליד כל סעיף מצויין (בסוגריים) ערכו בנקודות.
- הזמן המוקצב למבחן הינו שעתיים וחצי.
- אסור שימוש במחשבון או בכל חומר עזר אחר פרט לדף הנוסחאות.

שאלה מס' 1 (24 נקודות):

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{xm}}$, m פרמטר ממשי.

- א. (8 נק') עבור אילו ערכים של m יש לפונקציה נקודת קיצון יחידה?
- ב. (12 נק') יש לחקור את הפונקציה עבור הערך $m = 1$, ויש למצוא:
- תחום הגדרה.
 - אסימפטוטות משופעות או אופקיות, אם ישנן. אסימפטוטות אנכיות, אם ישנן.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון מקומיות.
 - תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול.
 - יש לצייר סקיצה של הפונקציה.
- ג. (4 נק') עבור אילו ערכים של הפרמטר k , יש למשוואה $\frac{x^2 + 1}{e^{|x|}} = k$ בדיוק שני פתרונות?

שאלה מס' 2 (20 נקודות):

יש לפתור את אי השוויון: $\frac{\sin(x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \leq 0$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

שאלה מס' 3 (20 נקודות):

נתונות הפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = \sqrt{2-x}$.

הנקודה A נמצאת על $f(x)$, הנקודה B נמצאת על $g(x)$ והנקודה C נמצאת על ציר ה- x , כך שמתקיים:

AB מקביל לציר ה- x , BC מקביל לציר ה- y .

נסמן את הנקודה A: $A(m, \sqrt{m})$.

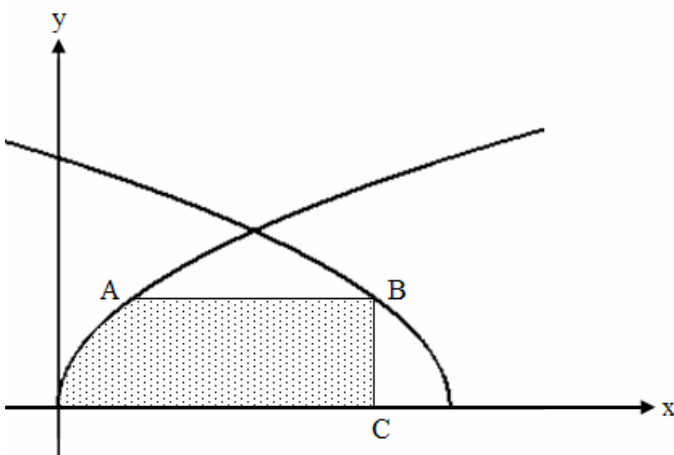
א. (10 נק') יש לבטא את השטח המסומן ברביע הראשון (השטח המנוקד בציר)

באמצעות m . (כאשר הנקודה A שמאלה

מנקודה B)

ב. (10 נק') מצאו את ערכי m עבורם השטח

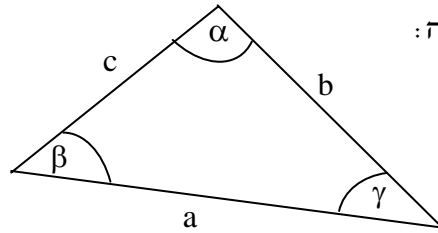
הנייל מקסימלי



שאלה מס' 4 (20 נקודות):

א. (10 נק') נתון משולש ובו מתקיים: $a = 4 \cdot R \cdot \sin(\beta) \cos(\gamma)$ (R - רדיוס מעגל חוסם).
צ"ל: המשולש הינו שווה שוקיים.

ב. (10 נק') הוכיחו כי בכל משולש מתקיים: $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\gamma) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma)}$



תזכורת: המשולש המדובר הוא מהצורה הבאה:

שאלה מס' 5 (16 נקודות):

א. (8 נק') נתונות הספרות 0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9.

כמה מספרים **חמש ספרתיים** בעלי ספרות **שונות** זו מזו ניתן ליצור מהן אם הספרה 3 **חייבת** להיות ספרת המאות (הספרה האמצעית) במספר הנ"ל והמספר **חייב** להתחלק **בחמש**.

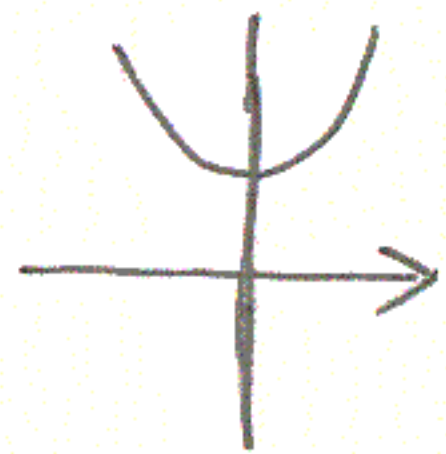
ב. (8 נק') בפיתוח הבינום $(x\sqrt{x} - x^{-4})^n$, המקדם הבינומי השלישי מהסוף גדול ב- 44 מהמקדם הבינומי השני מהתחלה. מצאו את המקדם של x^{-11} .

בהצלחה



①

$$y = \frac{x^2 + 1}{e^{mx}} \Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow$$



(-∞)

$$0 = x^2 + 1 \Rightarrow \emptyset$$

strik y/c

$$y' = \frac{2x \cdot e^{mx} - e^{mx} \cdot m(x^2 + 1)}{(e^{mx})^2}$$

$$= \frac{e^{mx} (2x - mx^2 - m)}{(e^{mx})^2}$$

①

x

③

q/nh pk
x n3 pb

(0, 1)

$$y' = \frac{-mx^2 + 2x - m}{e^{mx}}$$

⑦

$$m = 1$$

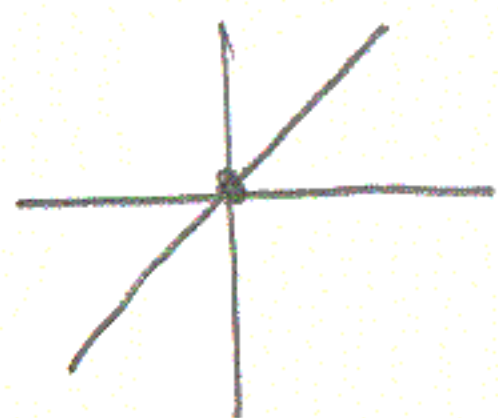
$$y = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$$

⑥

$$-mx^2 + 2x - m$$

$$\boxed{m=0} \Rightarrow y' = 2x \quad (0, 1)$$



⑧

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x \cdot x} = \frac{x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{②}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 0$$

strik

y = 0

$$\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x \cdot x} = \frac{x + \frac{1}{x}}{e^x} = x \cdot e^{-x} = \infty$$

 \rightarrow אולימפיק
 \rightarrow אולימפיק

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 = 0 \\ -(x-1)^2 \\ x=1 \end{cases}$$

 $\frac{-}{1} \frac{-}{1}$
 \uparrow

 $\frac{1}{1} \frac{1}{1}$

 \Rightarrow

 $\frac{1}{1} \frac{1}{1}$

 \Rightarrow

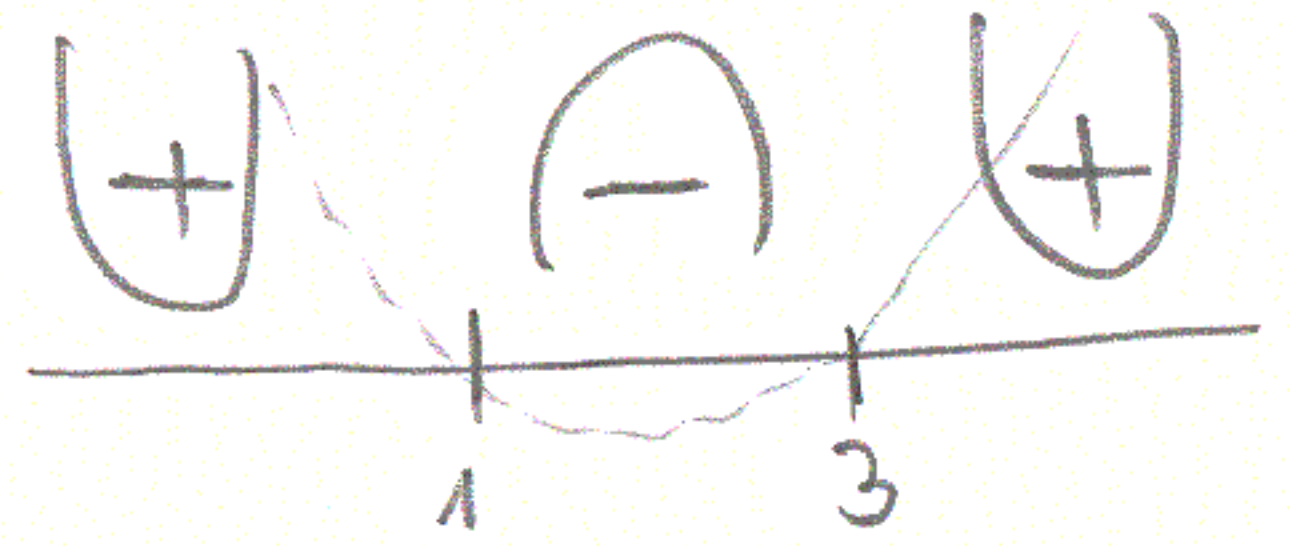
 $\frac{1}{1} \frac{1}{1}$

$$y'' = \frac{(-2x+2)e^x - e^x(-x^2+2x-1)}{e^{2x}} = \frac{-2x+2+x^2-2x+1}{e^x} = \frac{x^2-4x+3}{e^x}$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

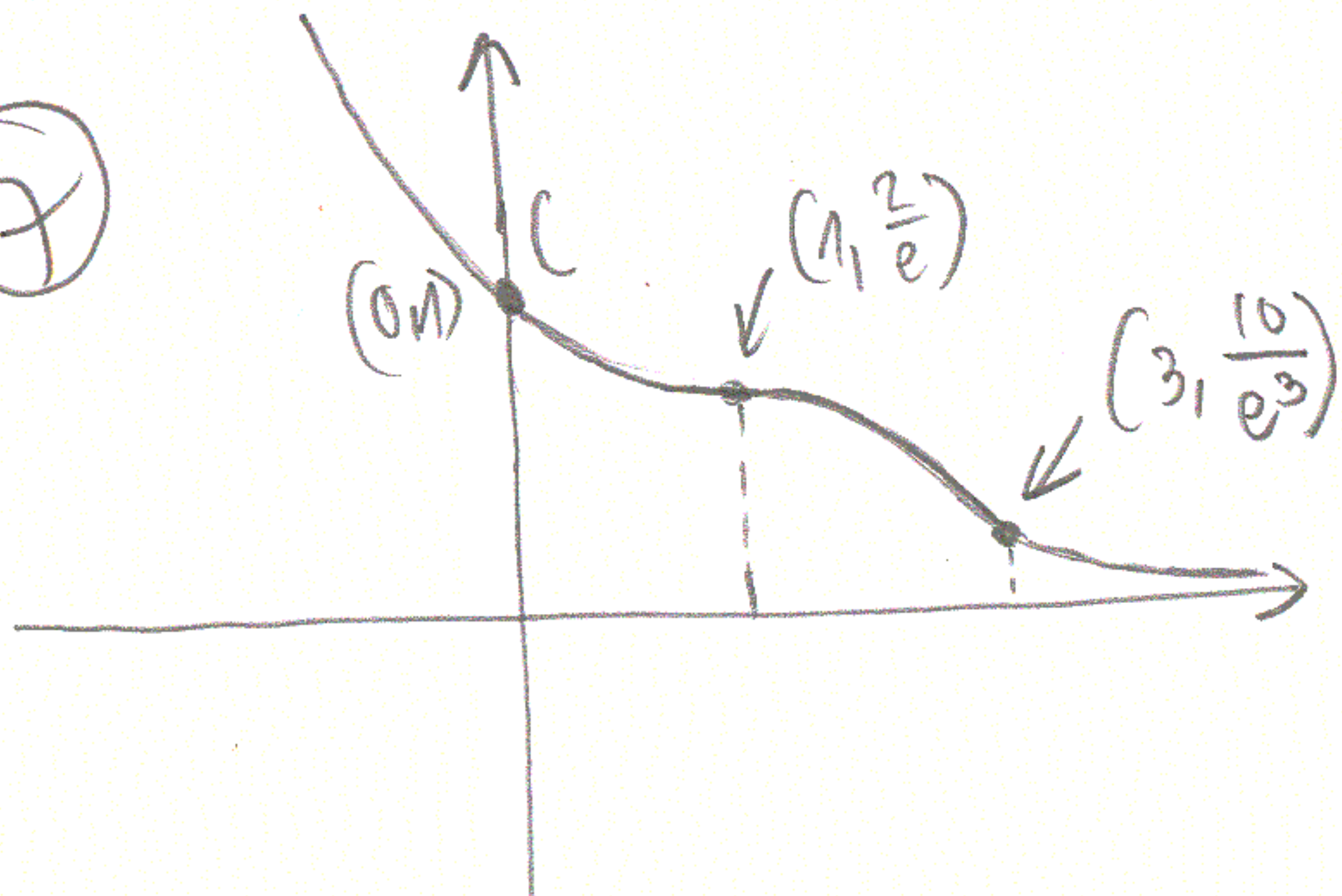
$(3, \frac{10}{e^3}) \quad (1, \frac{2}{e})$

$\frac{10}{e^3}$



$x < 1 \quad , \quad x > 3 \quad : \cup$
 $1 < x < 3 \quad : \cap$

7



8

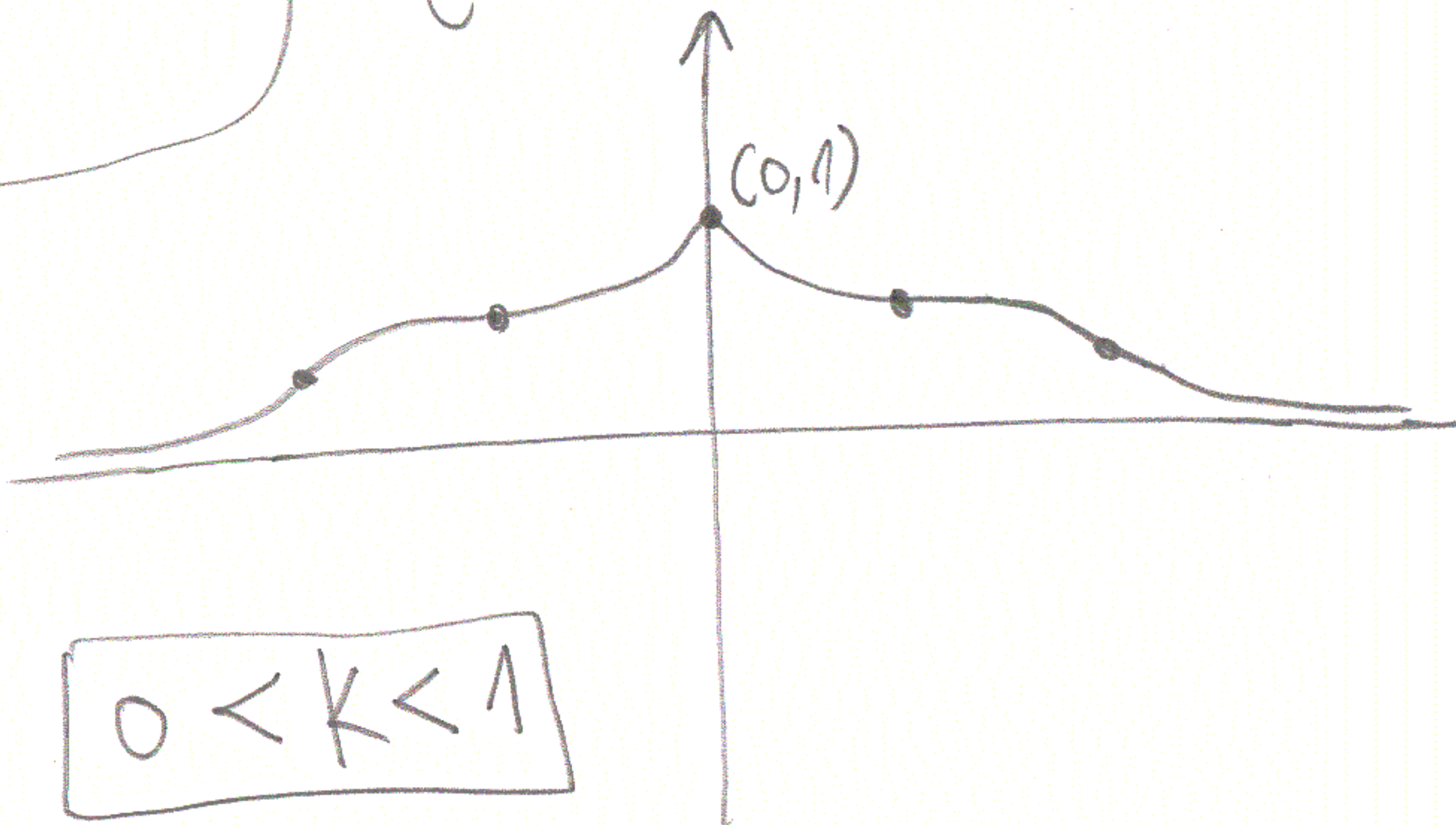
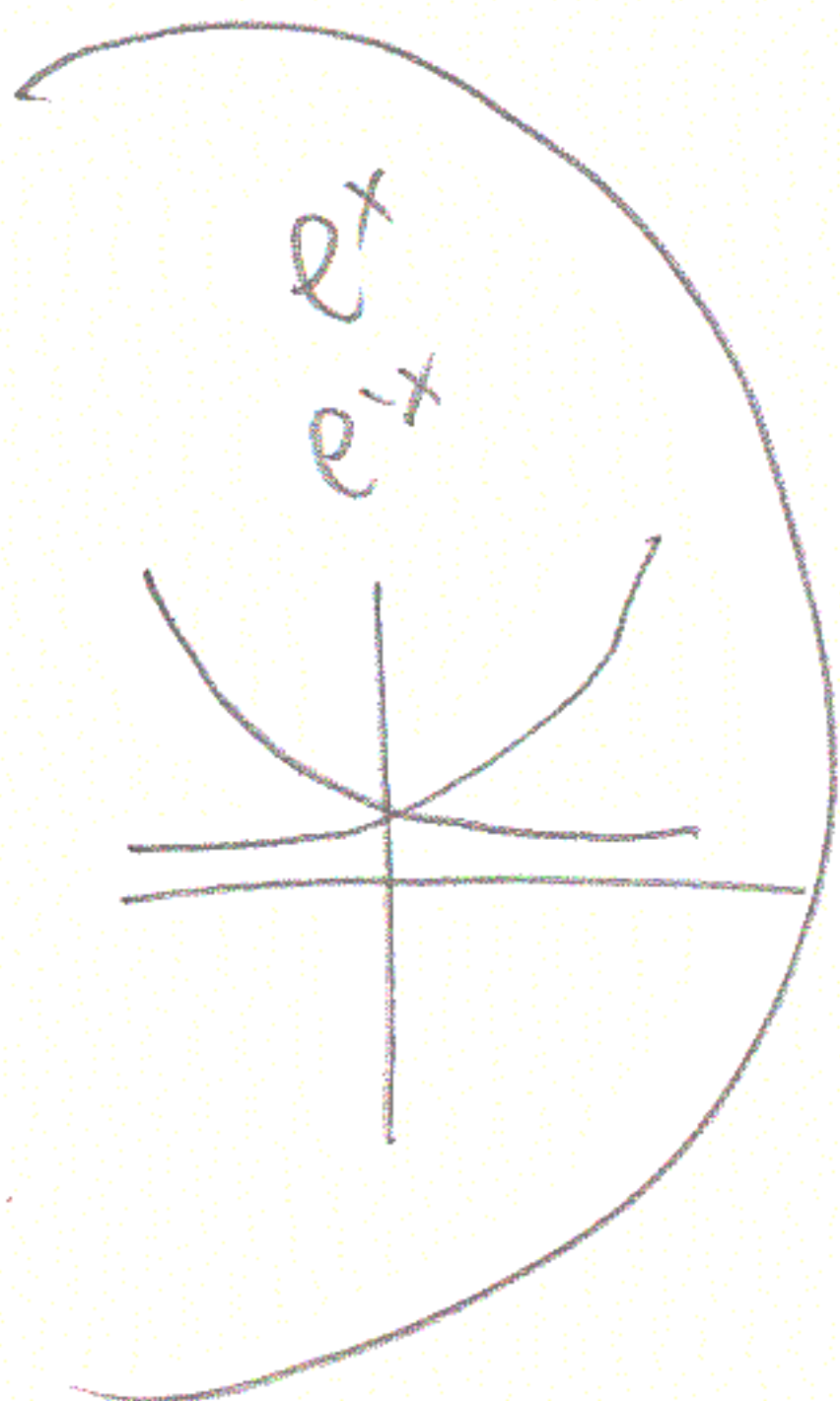
$$\frac{x^2 + 1}{e^{|x|}} = K$$

$$x < 0$$

$$x > 0$$

$$\frac{x^2 + 1}{e^{-x}}$$

$$\frac{x^2 + 1}{e^x}$$



②

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\frac{\sin x - 2\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + 1}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} \leq 0$$

$$2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + 1$$

$$2\sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - 1) - (\cos \frac{x}{2} - 1)$$

$$(2\sin \frac{x}{2} - 1)(\cos \frac{x}{2} - 1)$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad \left| \quad \cos \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k$$

$$\frac{x}{2} = 0 + 2\pi k$$

$$x = 0 + 4\pi k$$

$$\frac{x}{2} = 0 + 2\pi k$$

$$x = 0 + 4\pi k$$

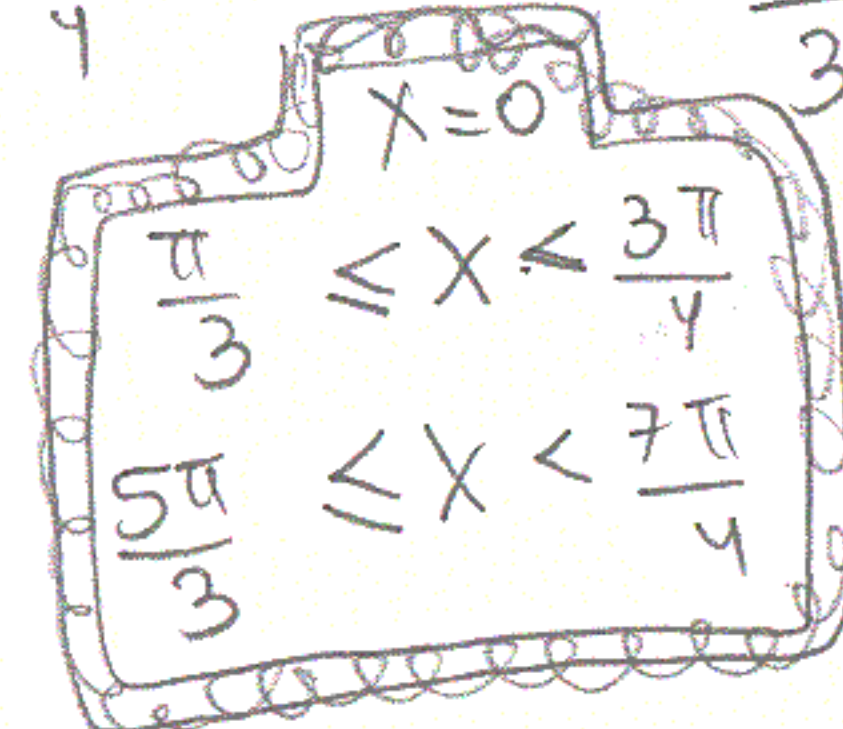
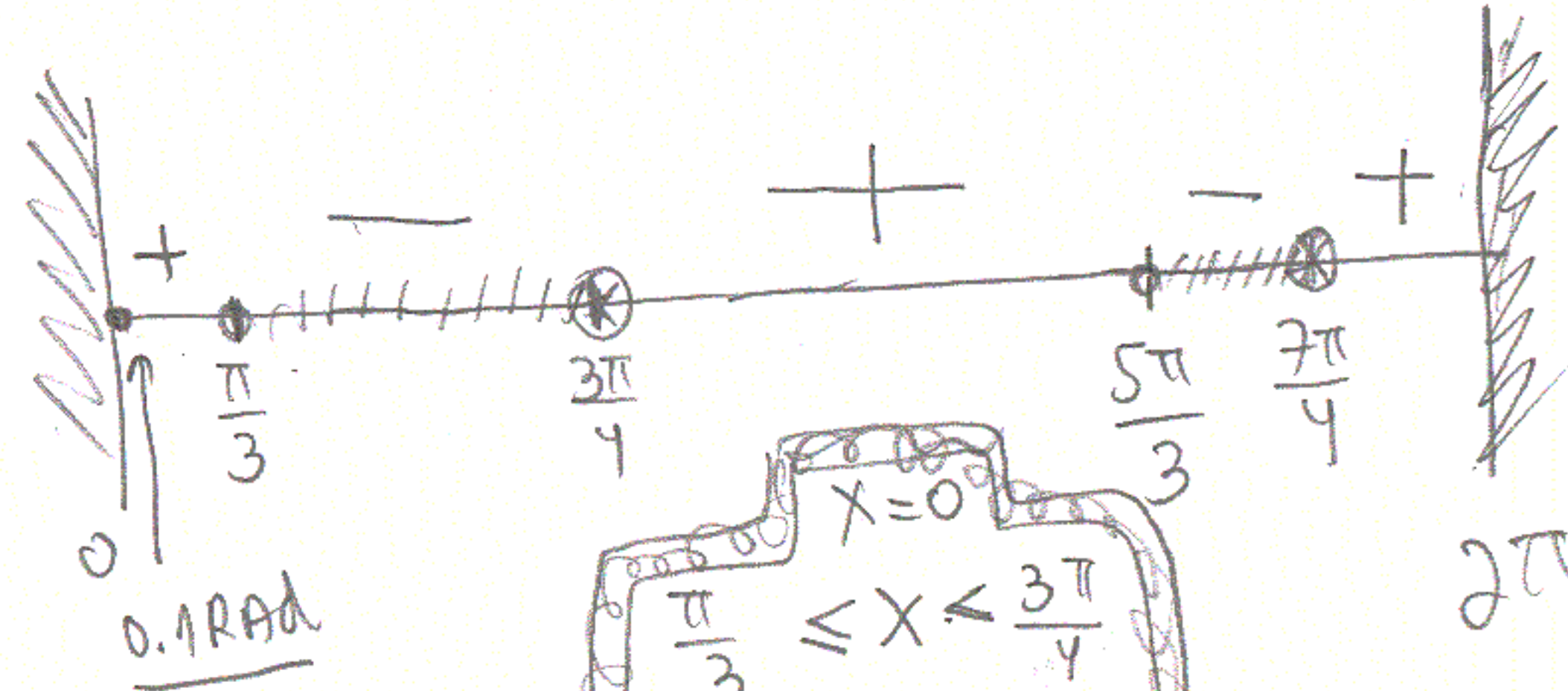
$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x - \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

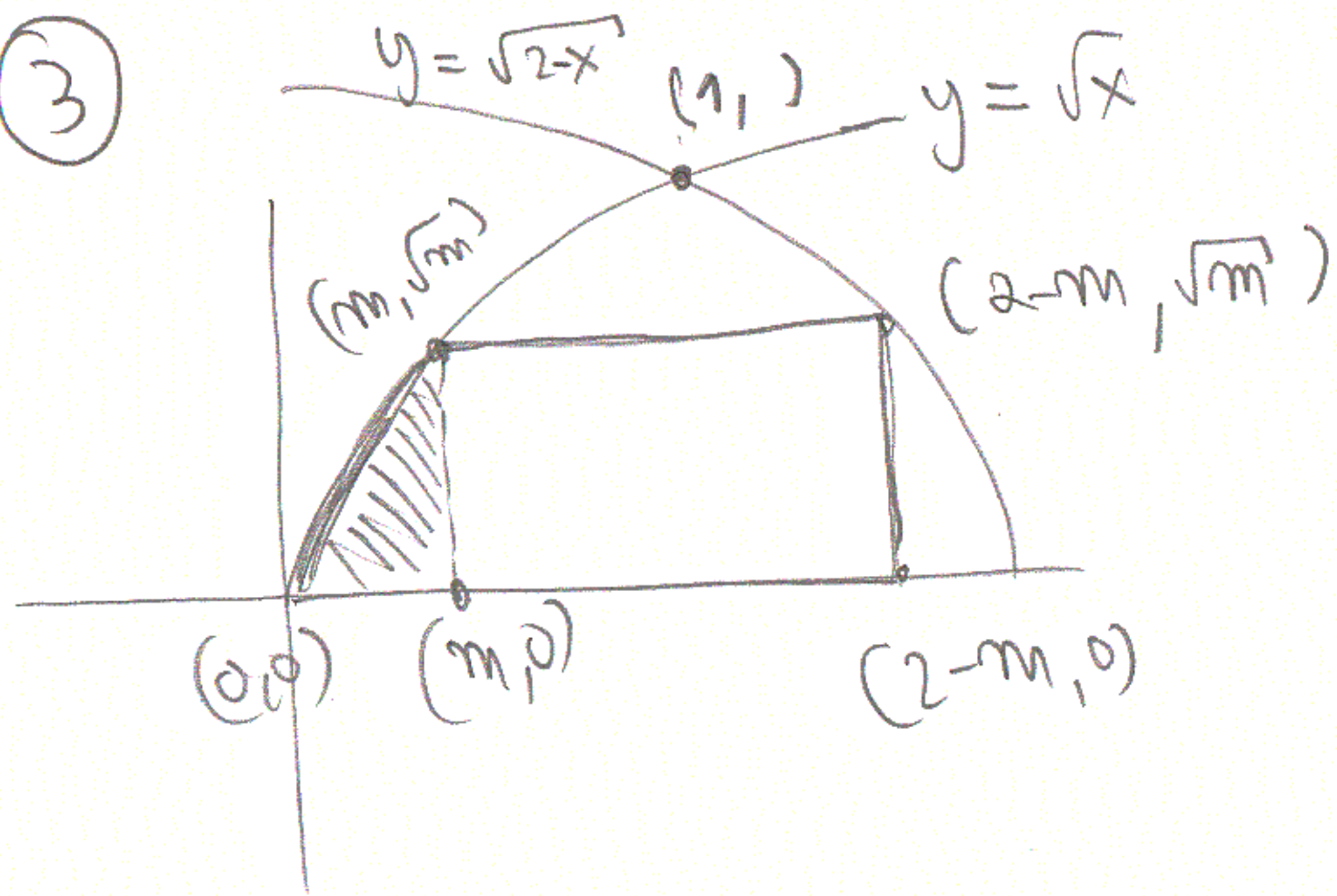
$$x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$



$$\frac{(2\sin \frac{x}{2} - 1)(\cos \frac{x}{2} - 1)}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} \leq 0$$

⊖ ⊖
+

3



$$\sqrt{m} = \sqrt{2-x}$$

$$m = 2-x$$

$$x = 2-m$$

$$m^{1.5} = m^1 \cdot m^{\frac{1}{2}}$$

$$m\sqrt{m}$$

$$2-x = x$$

$$2 = 2x$$

$$1 = x$$

$$\sqrt{m} \cdot (2-2m) \rightarrow (2-2m)\sqrt{m}$$

$$\int_0^m x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{1.5}}{1.5} \Big|_0^m = \frac{m^{1.5}}{1.5}$$

$$S = \frac{2}{3} m^{1.5} + 2\sqrt{m} - 2m\sqrt{m} = 2\sqrt{m} - \frac{4}{3} m^{1.5} = 2\sqrt{m} - \frac{4}{3} m\sqrt{m}$$

$$\boxed{\sqrt{m} \left(2 - \frac{4}{3} m \right)}$$

$$S' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot m^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m} = 0 \Rightarrow 1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{+}{0.4} \quad \frac{-}{\frac{1}{2} \quad 0.6}$$

\Rightarrow

$$\boxed{m = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{MAX}}$$

4

$$a = 4R \sin \beta \cos \gamma$$

5

$$2R \sin \alpha = 4R \sin \beta \cos \gamma$$

$$\sin(\beta + \gamma) = 2 \sin \beta \cos \gamma$$

$$\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma = 2 \sin \beta \cos \gamma$$

$$0 = \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma$$

$$\sin(\beta - \gamma) = 0$$

$$\beta - \gamma = 0$$

∴

$$\boxed{\beta = \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \text{; gabo } \cos \gamma$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

④
⑧

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2ac \cos \beta}{c^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \sin \beta$$

$$c = 2R \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{2 \cdot 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \alpha \cos \beta}{4R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$1 = 1$$



5
10

0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9

— — — 3 — — 0

⇒

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

— — — 3 — — 5

⇒

$$6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = \frac{120 - 20 = 100}{\boxed{220}}$$

$\boxed{220}$

5
7

$$(X^{1.5} - X^{-4})^n$$

$$C_n^2 - 44 = C_n^1$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} - 44 = \frac{n!}{1!(n-1)!}$$

$$n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$$

$$\frac{(n-1)n}{2} - 44 = n$$

$$n^2 - n - 88 - 2n = 0$$

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

$$(n-11)(n+8) = 0$$

$\boxed{n=11}$

↓
 $n=-8$
 ϕ

$$C_{11}^k \cdot (X^{1.5})^{11-k} \cdot (-X^{-4})^k$$

$$C_{11}^k (-1)^k \cdot X^{\frac{33}{2} - 1.5k - 4k}$$

$$\frac{33}{2} - 5.5k = -11$$

$$33 - 11k = -22$$

$$55 = 11k$$

$\boxed{5 = k}$

$\boxed{-C_{11}^5}$