

מבחן אמצע במתמטיקה – סמסטר ב'

הנחיות לנבחן

- משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.
- פתרו את כל השאלות. רשמו את שם כיתת האם על המחברת.
- מותר להשתמש בדפי הנוסחאות האישיים בלבד.
- בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.

שאלה 1 – 20%

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{ax^2 + 12x + b}$, פרמטר ממשי. a

- (8%) לאילו ערכי a ו- b יש לפונקציה שתי אסימפטוטות **בלבד** אחת ב- $y=1$ והשנייה אנכית.
- (12%) חקרו את הפונקציה עבור $a=4$, $b=9$ ומצאו:

תחום הגדרה, אסימפטוטות, חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות, תחומי קמירות מעלה ומטה, נקודות פיתול. שרטטו גרף של הפונקציה.

שאלה 2 – 14%

פתרו את אי השוויון: $\log_2(\sin x) - \log_2(\cos x) - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) \geq -1$

שאלה 3 – 14%

חשבו את שטח התחום הנמצא בין ציר x , ציר y , הישר $x=1$ וגרף הפונקציה $y = \frac{x+3}{2x+1}$.

שאלה 4 – 20%

- (10%) סכום איברי סדרה גיאומטרית אינסופית מתכנסת גדול פי 3 מסכום ריבועי האיברים של אותה סדרה. מצא את האיבר החמישי בסדרה אם ידוע שסכום שני האיברים הראשונים שווה ל-0.75.
- (10%) בקבוצה 32 תיירים ו-4 מאבטחים. בכמה אופנים שונים ניתן לחלקם לשתי **קבוצות שוות בגודלן** לביקור **באתרים שונים**:
 - בלי אילוצים.
 - בכל קבוצה יהיו 2 מאבטחים. (מספיק להשאיר ביטוי גולמי)

שאלה 5 – 20%

- (10%) עבור אילו ערכים של x האיבר **האמצעי** בפיתוח של הבינום $\left(2\cos^3 x + \frac{1}{\cos x}\right)^6$ קטן מ-20.
- (10%) הוכיחו שהביטוי: $(\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) - (\sin \alpha + \cos \alpha)$ שווה ל-0 לכל α מתחום הגדרתו.

שאלה 6 – 12%

- מבין כל המלבנים הנמצאים ברביע הראשון, ששלושה מקודקודיו נמצאים על הצירים והרביעי נמצא על גרף הפונקציה $y = 4 \cos \frac{x}{2}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, מצא מידות של המלבן בעל היקף מקסימלי ובעל היקף מינימלי אם יש כזה. נמק!

בהצלחה!

(1) $y = \frac{(2x-1)^2}{ax^2+12x+b}$
 (k)

לפי משפט ל'ור' 37:

$\boxed{y=1}$ | $\boxed{\text{אנליזת}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x - 1}{ax^2 + 12x + b} = \frac{x^2(4 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(a + \frac{12}{x} + \frac{b}{x^2})} = \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow \boxed{a=4}$

לפי משפט ל'ור' אנליזת יחידה האסר

$\frac{(2x-1)^2}{4x^2+12x+b}$

המכנה $\boxed{\text{באיזו צורה}}$

$4x^2 + 12x + b = (2x)^2 + 2(2x) \cdot 3 + b$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$ $\boxed{b=9}$ אם נסדר

$\boxed{x = -\frac{3}{2}}$ ויהיה אסמטוטה אנליזת האסר

אם נבחר אסמטוטה יחידה האסר המונה והמכנה

$\boxed{1/2}$ ואל תהיה נקודת חור + אנליזת אחרת

$4x^2 + 12x + b = (2x-1)(2x+w) = 4x^2 + 2xw - 2x - w$
 $4x^2 + x(2w-2) - w$
 $2 = 2w - 2 \Rightarrow \boxed{w=7} \Rightarrow \boxed{b=-7}$

$\frac{(2x-1)^2}{4x^2+12x-7} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2-2x+14x-7} = \frac{(2x-1)(2x-1)}{2x(2x-1)+7(2x-1)}$

$\frac{(2x-1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+7)} = \frac{2x-1}{2x+7}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ חור
 $\boxed{x = -\frac{7}{2}}$ אנליזת

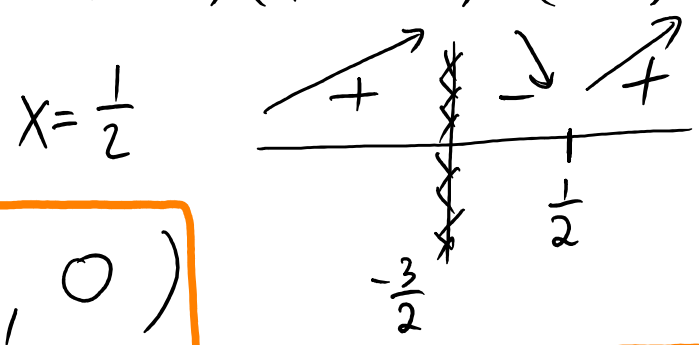
② $y = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+12x+9} = \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^2$ $x \neq -\frac{3}{2}$:ה.נ

$x = -\frac{3}{2}$, $y = 1$:אסימטוטה אנכית

③ $y' = 2 \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right) \left(\frac{2(2x+3) - 2(2x-1)}{(2x+3)^2}\right)$

$(0, \frac{1}{9})$, $(\frac{1}{2}, 0)$:חיתוך עם הצירים

$y' = 2 \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right) \left(\frac{8}{(2x+3)^2}\right) = \frac{16(2x-1)}{(2x+3)^3}$

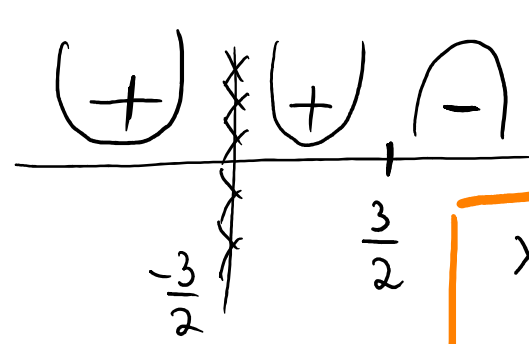


$(\frac{1}{2}, 0)$
MIN

$-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} : \searrow$
 $x < -\frac{3}{2}, x > \frac{1}{2} : \nearrow$

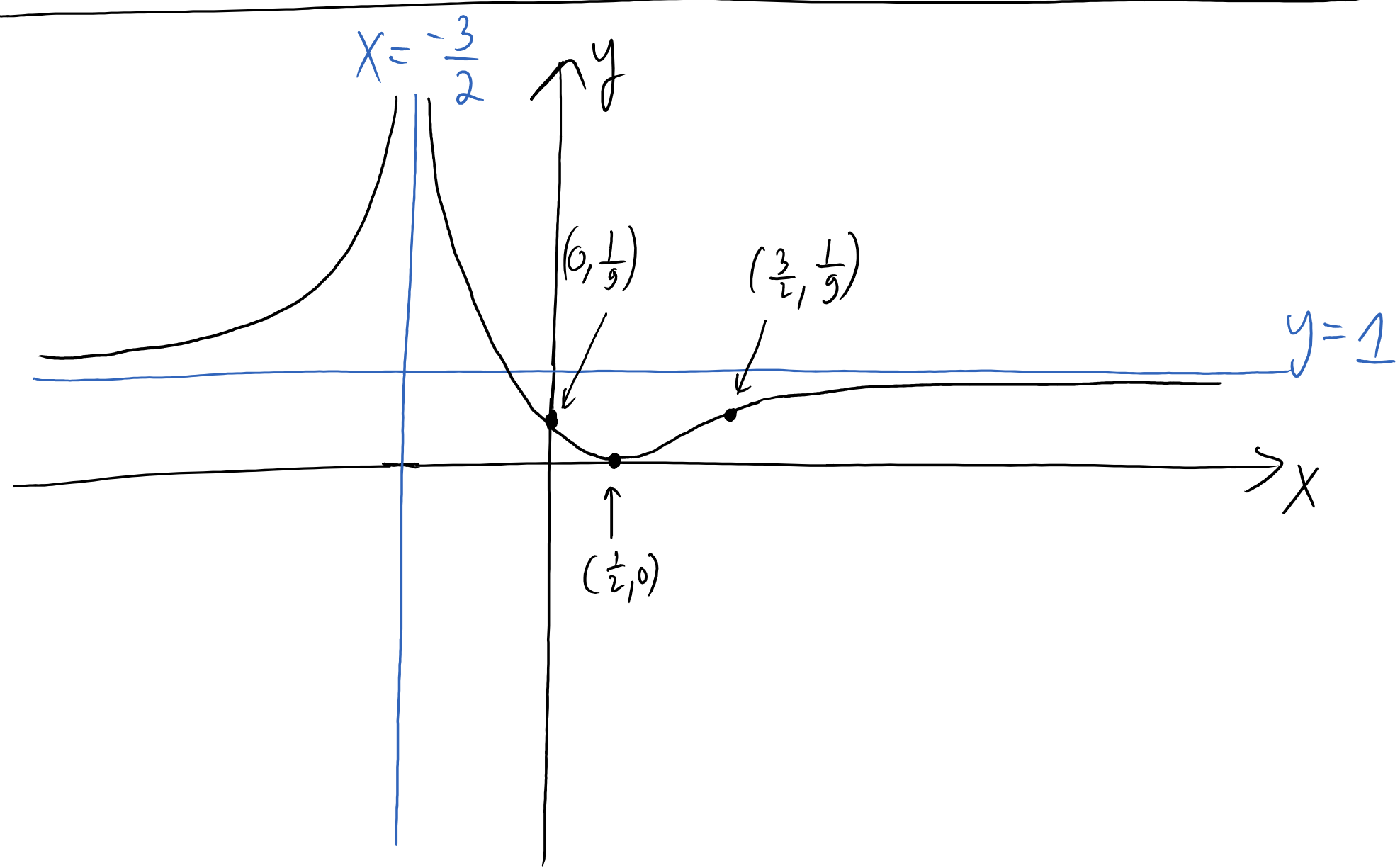
$y'' = 16 \left(\frac{2(2x+3)^3 - 3(2x+3)^2 \cdot 2(2x-1)}{(2x+3)^4}\right)$

$y'' = \frac{16 \cdot 2(2x+3)^2 [(2x+3) - 3(2x-1)]}{(2x+3)^4} = \frac{32(6-4x)}{(2x+3)^2}$



$(\frac{3}{2}, \frac{1}{9})$:מ'אטה

$x < -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} : \cup$
 $x > \frac{3}{2} : \cap$



$$\textcircled{2} \log_2(\sin x) - \log_2(\cos x) - \log_2(1 - \tan x) - \log_2(1 + \tan x) \geq -1$$

$$\sin x > 0$$

$$\cos x > 0$$

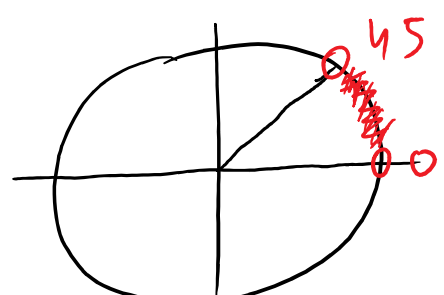
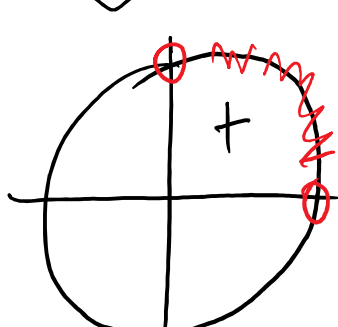
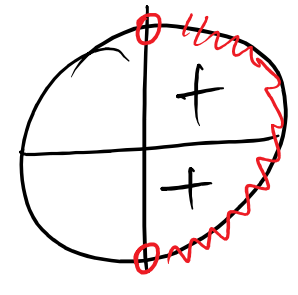
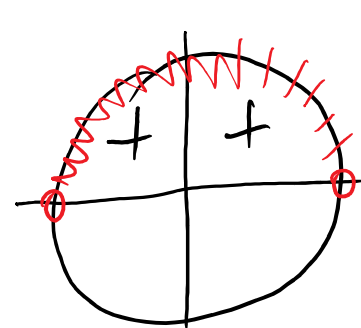
$$1 - \tan x > 0$$

$$1 + \tan x > 0$$

$$1 > \tan x$$

$$\tan x > -1$$

$$-1 < \tan x < 1$$



$$\log_2 \left(\frac{\sin x}{\cos x(1 - \tan x)(1 + \tan x)} \right) \geq \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x () ()} \geq \frac{1}{2}$$

*גורמה חיובי בתייה ופסן מואר ענכוד

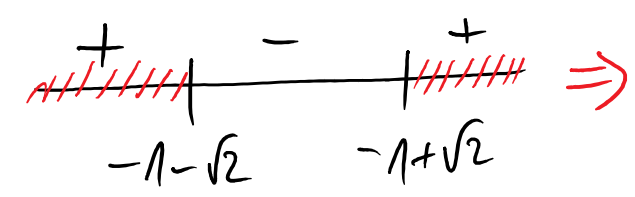
$$2 \sin x \geq \cos x (1 - \tan^2 x)$$

$$2 \tan x \geq 1 - \tan^2 x$$

$$\tan^2 x + 2 \tan x - 1 \geq 0$$

$$t^2 + 2t - 1 \geq 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$\tan x \geq -1 + \sqrt{2}$$

$$\tan x \leq -1 - \sqrt{2}$$

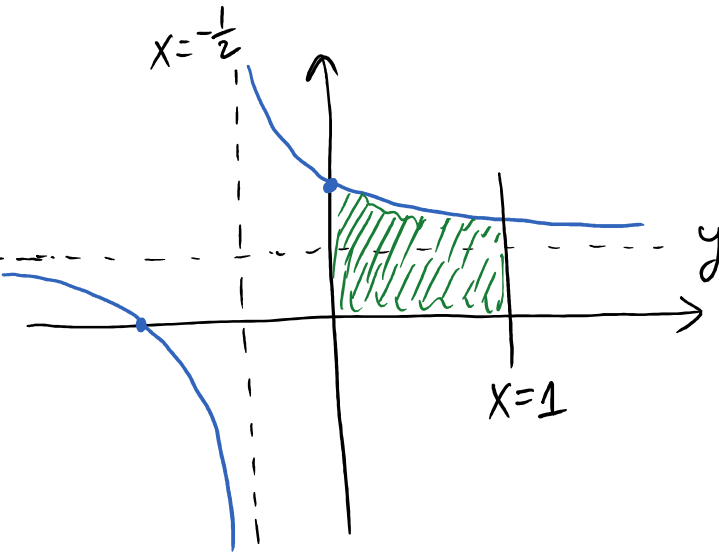
מ'ח'מ' > כ'כ' $\tan x \leq -1 - \sqrt{2}$

ה'ח'ק'מ' $\rightarrow 1 > \tan x \geq -1 + \sqrt{2}$

$45 + 360K > x \geq \arctan(-1 + \sqrt{2}) + 360K$

$\arctan(-1 + \sqrt{2}) = 22.5^\circ$

③ $y = \frac{x+3}{2x+1} = \frac{x+\frac{1}{2}+2.5}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} + \frac{2.5}{x+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2.5}{x+\frac{1}{2}} \right)$



$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2.5}{x+\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + 2.5 \ln |x + \frac{1}{2}| \right) \Big|_0^1$$

$$\frac{1}{2} \left[(1 + 2.5 \ln 1.5) - (0 + 2.5 \ln \frac{1}{2}) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + 2.5 (\ln 1.5 - \ln \frac{1}{2}) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[1 + 2.5 \ln 3 \right] = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \ln 3}$$

④ (k) $a_1 + a_2 + \dots = 3(a_1^2 + a_2^2 + \dots) \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2}$

$a_1 + a_2 = 0.75$

$a_1(1+q) = 0.75$

$3a_1^2 = 0.75$

$a_1^2 = 0.25$

~~$\frac{a_1}{1-q} = \frac{3a_1^2}{(1-q)(1+q)}$~~

$1 = \frac{3a_1}{1+q}$

$1+q = 3a_1$

$q = 3a_1 - 1$

$a_1 = 0.5$

$q = 0.5$

$a_1 = -0.5$

$q = -2.5$

\emptyset

$a_5 = a_1 \cdot q^4$

$a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{1}{32}}$

לכל קבוצה של 2
קבוצה של 2

36 } ת"ר 32
קבוצה { קבוצה 4

②

$C_{36}^{18} \cdot C_{18}^{18}$

קבוצה 188 ①

$C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot C_{32}^{16} \cdot C_{16}^{16}$

②

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

(5) (k)

$$\left(2\cos^3 x + \frac{1}{\cos x}\right)^6$$

$$C_6^0 | C_6^1 | C_6^2 | \boxed{C_6^3} | C_6^4 | C_6^5 | C_6^6$$

$$C_6^3 (2\cos^3 x)^3 \left(\frac{1}{\cos x}\right)^3 < 20$$

$$\cancel{20} \cdot 8 \cos^9 x \cdot \frac{1}{\cos^3 x} < \cancel{20}$$

$$\cos^6 x < \frac{1}{8}$$

$$\cos^6 x - \frac{1}{8} < 0$$

$$\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \underbrace{\left(\cos^4 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\right)}_{\text{מידת אלק?}}$$

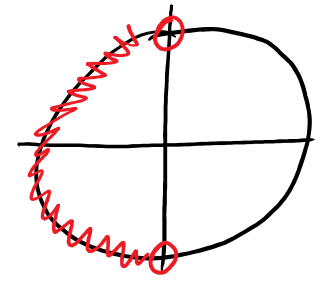
$$\cos^2 x - \frac{1}{2} < 0$$

$$2\cos^2 x - 1 < 0$$

$$\cos 2x < 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k}$$



(?) $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} - (\sin \alpha + \cos \alpha)$

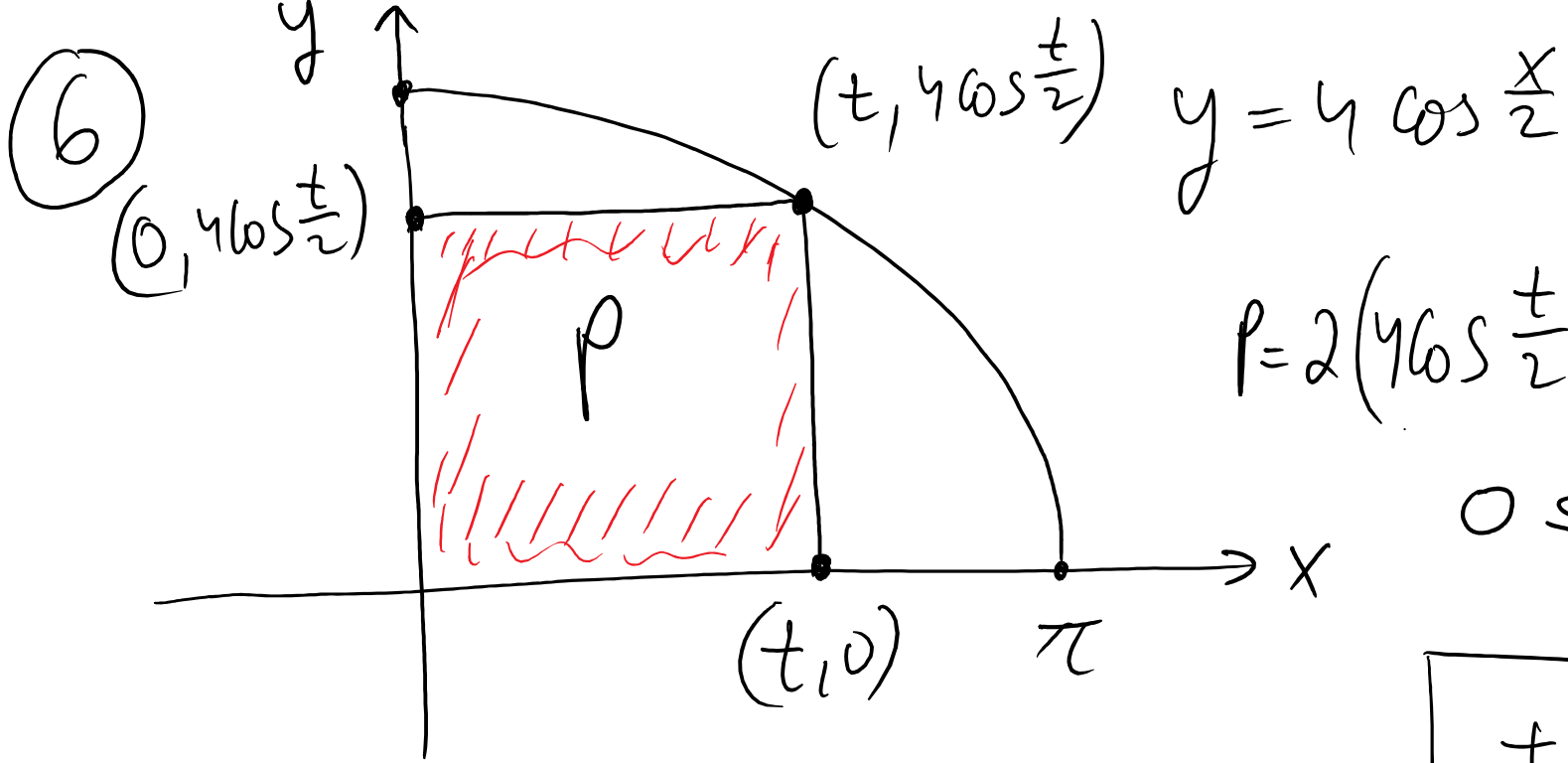
$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\cancel{(\sin \alpha + \cos \alpha)} \cdot \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} - (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$(\cos \alpha - \sin \alpha) \cancel{(\sin \alpha + \cos \alpha)}$

$$\frac{-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\cos 2\alpha - (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{\cos 2\alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\parallel} = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha}{\parallel} = \boxed{0}$$

f.e.N



$$P' = 4 \cdot \left(-\sin \frac{t}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$-2 \sin \frac{t}{2} + 1 = 0$$

$$\sin \frac{t}{2} = +\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{3}$$

$$4 \cos \frac{t}{2} = 4 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{t}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi K \quad \frac{t}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi K$$

$$t = \frac{\pi}{3} + 4\pi K \quad t = \frac{5\pi}{3} + 2\pi K$$

$t = \frac{\pi}{3}$ MAX

כא כ בתחום התחזור

