

בחינת טרימסטר ב' במתמטיקה

- א. משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.
יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.
ב. יש לפתור את כל השאלות.
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים בלבד.
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
ו. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (20%)

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x-1} \quad 8\% \quad \text{א. נתונה הפונקציה}$$

1. (6%) עבור אילו ערכים של a ו- b הישר $y = x + 4$ יהיה אסימפטוטה של גרף הפונקציה?
2. (2%) האם הישר $x = 1$ הוא בהכרח אסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה?

$$12\% \quad \text{ב. צייר רשומת (סקיצה) של גרף הפונקציה} \quad f(x) = \frac{|x^2 + 3x|}{x-1}$$

- על הגרף סמן: 1. נקודות חיתוך עם הצירים. 2. נקודות קיצון (אם יש כאלה). 3. נקודות פיתול (אם יש כאלה).
רשום את המשוואות של כל האסימפטוטות של גרף הפונקציה.

שאלה 2 (16%)

- 2% א. הוכח כי עבור כל מספר קבוע a מתקיים: $\int (a-x)e^x dx = (a+1-x)e^x + c$
14% ב. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור כל x , שווה ל- $(3-x)e^x$. הנקודה $(4, 2+e^4)$ היא נקודת קיצון של $f(x)$. מצא את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה, ציר ה- x , ציר ה- y והישר $x=3$.

שאלה 3 (14%)

- 8% א. a_1, a_2, a_3, \dots ו- b_1, b_2, b_3, \dots הן שתי סדרות חשבוניות בעלות הפרשים d_1 ו- d_2 בהתאמה.

$$\text{נתון: } \left(\sum_{m=1}^{30} a_m = 6 \sum_{m=1}^{15} b_m \right) \quad a_{26} = 3b_{15}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{30} = 6[b_1 + b_2 + \dots + b_{15}]$$

$$1. (6\%) \quad \text{מצא את היחס בין הפרשי הסדרות } \left(\frac{d_1}{d_2} \right)$$

2. (2%) האם יתכן ש- a_1 הוא מספר שלם זוגי ואילו b_1 הוא מספר שלם אי-זוגי?
6% ב. הערך המינימלי והערך המקסימלי של הפונקציה $y = x^2 + \frac{2}{x}$ בקטע $[0.5, 2]$ הם בהתאמה המנה והאיבר

$$\text{הראשון של הסדרה הגיאומטרית } a_1, a_2, a_3, \dots \text{ הוכח כי } \left(\sum_{m=1}^6 a_m < 2000 \right) \quad a_1 + \dots + a_6 < 2000$$

שאלה 4 (16%)

הוכח כי לכל n טבעי

$$8\% \quad \text{א. מתקיים אי-השוויון} \quad \left(\sum_{m=1}^{2n+1} m2^m > n2^{2n+3} \right) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{2n+1} > n \cdot 2^{2n+3}$$

$$8\% \quad \text{ב. המספר} \quad \left(101^n + \sum_{m=1}^{4n-1} 7^m \right) \quad 101^n + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4n-1} \text{ מתחלק ב-100 ללא שארית.}$$

שאלה 5 (18%)

9% א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $\frac{\text{ctg } 2x}{\text{ctg } x} + \frac{\text{ctg } x}{\text{ctg } 2x} + 2 = 0$ בקטע $(0, 2\pi)$.

9% ב. עבור אילו ערכים של $x \in [0, \pi]$ מתקיים אי-השוויון $[2 \cos 2x + 5][\sin^4(x - 1.5\pi) - \cos^4(x + 3.5\pi)] \leq 3$?

שאלה 6 (16%)

במשולש חד זווית ABC : $BC = a$, $\angle ABC = \beta^\circ$, $\angle ACB = \gamma^\circ$.

10% א. הוכח כי רדיוס המעגל, שמשיק לצלע BC ושמוקדו בנקודת A , שווה ל- $\frac{a \sin \beta^\circ \sin \gamma^\circ}{\sin(\beta^\circ + \gamma^\circ)}$.

ומצא את היחס המקסימלי האפשרי בין רדיוס המעגל הנייל לבין a עבור $\angle BAC = 60^\circ$?

6% ב. נתון ש- $BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$. חשב את אורך הקשת של המעגל הנמצאת מחוץ למשולש.

בהצלחה!

$$(k) \quad y = \frac{ax^2 + bx}{x-1}$$

(1 2 3 4)

$$y = \underline{\underline{x+4}} \leftarrow$$

$m=1 \quad n=4$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 - x} = \frac{x^2 \left(a + \frac{b}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + bx}{x-1} - x = \frac{x^2 + bx - x^2 + x}{x-1} = \frac{x(b+1)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = b+1=4$$

$\boxed{b=3}$

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x-1} = \frac{x(x-1) + 4x}{x-1} = \frac{x(x-1) + 4(x-1) + 4}{x-1} = \underline{\underline{x+4}} + \frac{4}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x}{x-1} = -\infty$$

\Rightarrow $x=1$
 vertikal
 asymptote

2

$$\frac{ax^2+bx}{x-1}$$

$$ax^2+bx=0$$

$$a1^2+b \cdot 1=0$$

$$\boxed{a=-b}$$

$$ax^2-ax$$

$$ax(x-1)$$

כסף
700
1800
1

$$y = \frac{ax(x-1)}{(x-1)}$$

בגלל כשה ←

חלק

הייתה וצומתם וכל 5 היחידים נעדרו

אם לא נעדרה

ב/א

כא $x=1$

אם כן
אנחנו

$$y = \frac{|x^2 + 3x|}{x-1}$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0 \quad x \neq 1$$

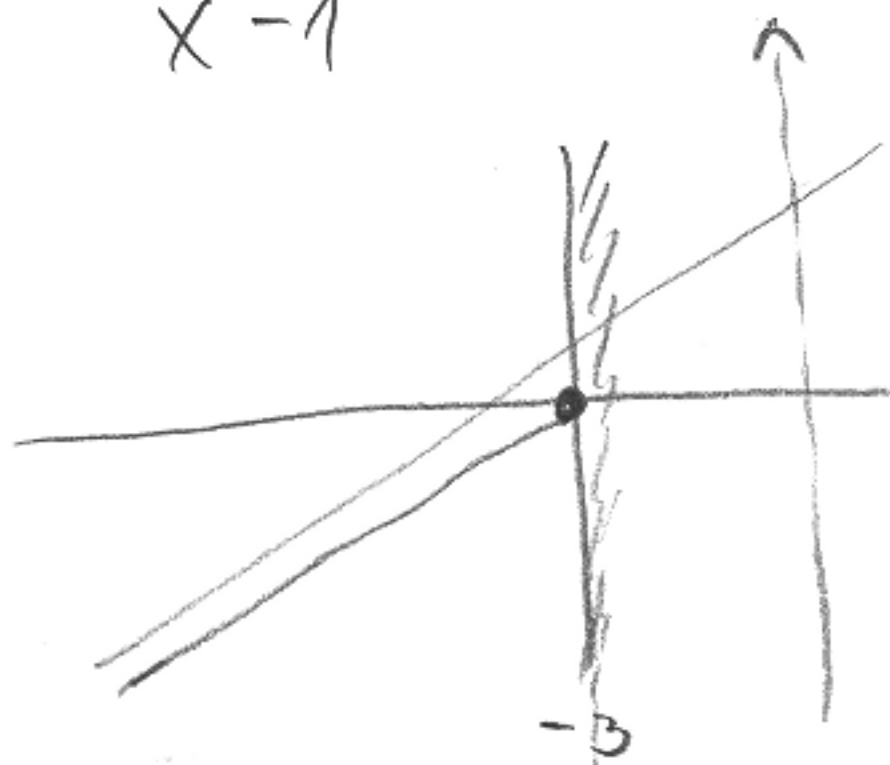
$$\boxed{(0,0)} \quad \boxed{(-3,0)}$$

$$x \leq -3$$

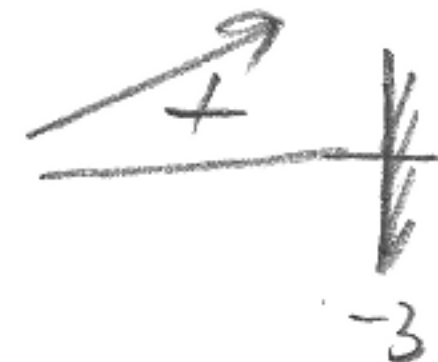
$$-3 < x \leq 0$$

$$x > 0$$

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x-1}$$



$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$$



$$y = \frac{-(x^2 + 3x)}{x-1}$$

$$y = -x - 4 - \frac{4}{x-1}$$

$$y' = -1 + \frac{4}{(x-1)^2} = 0$$

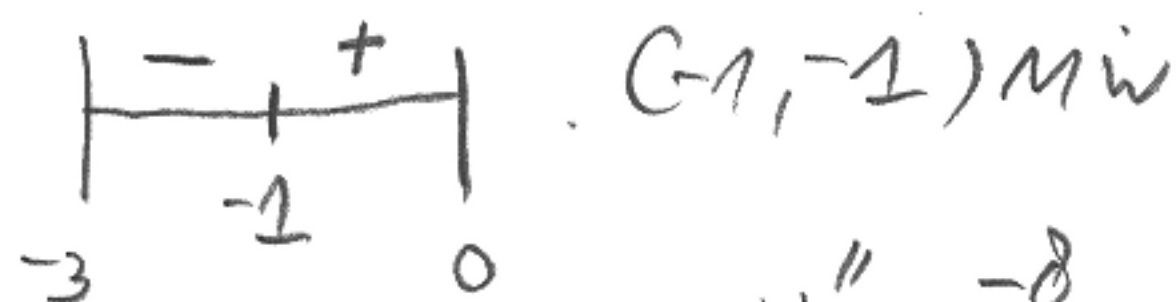
$$4 = (x-1)^2$$

$$x-1 = 2$$

$$x = 3$$

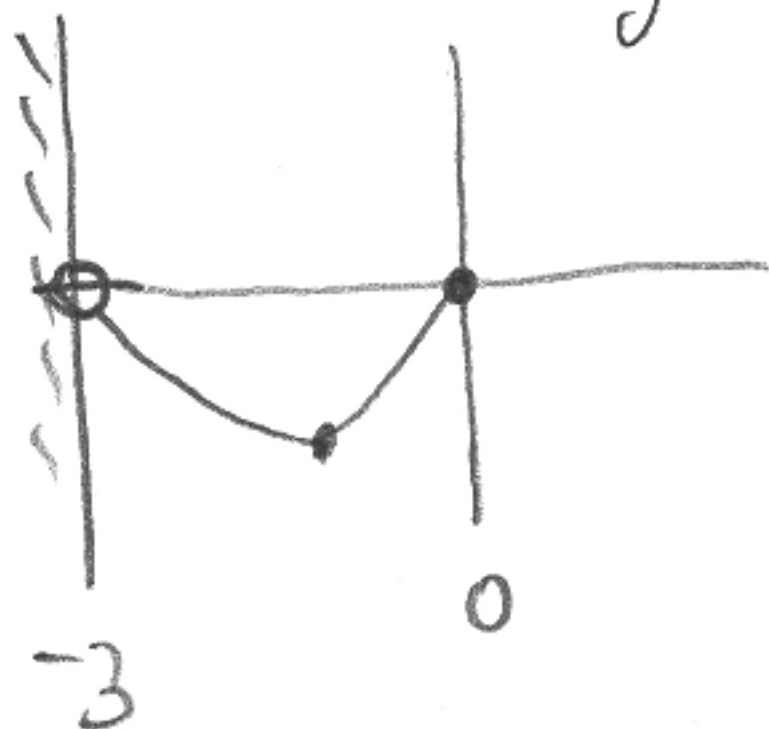
$$x-1 = -2$$

$$x = -1$$



$(-1, -1)$ Min

$$y'' = \frac{-8}{(x-1)^3}$$



$$y = \frac{x^2 + 3x}{x-1} = x + 4 + \frac{4}{x-1}$$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 0$$

$$(x-1)^2 = 4$$

$$x-1 = 2$$

$$x = 3$$

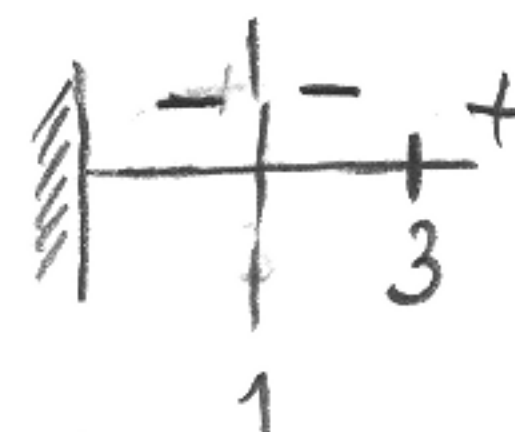
$$\boxed{(3, 9)}$$

Min

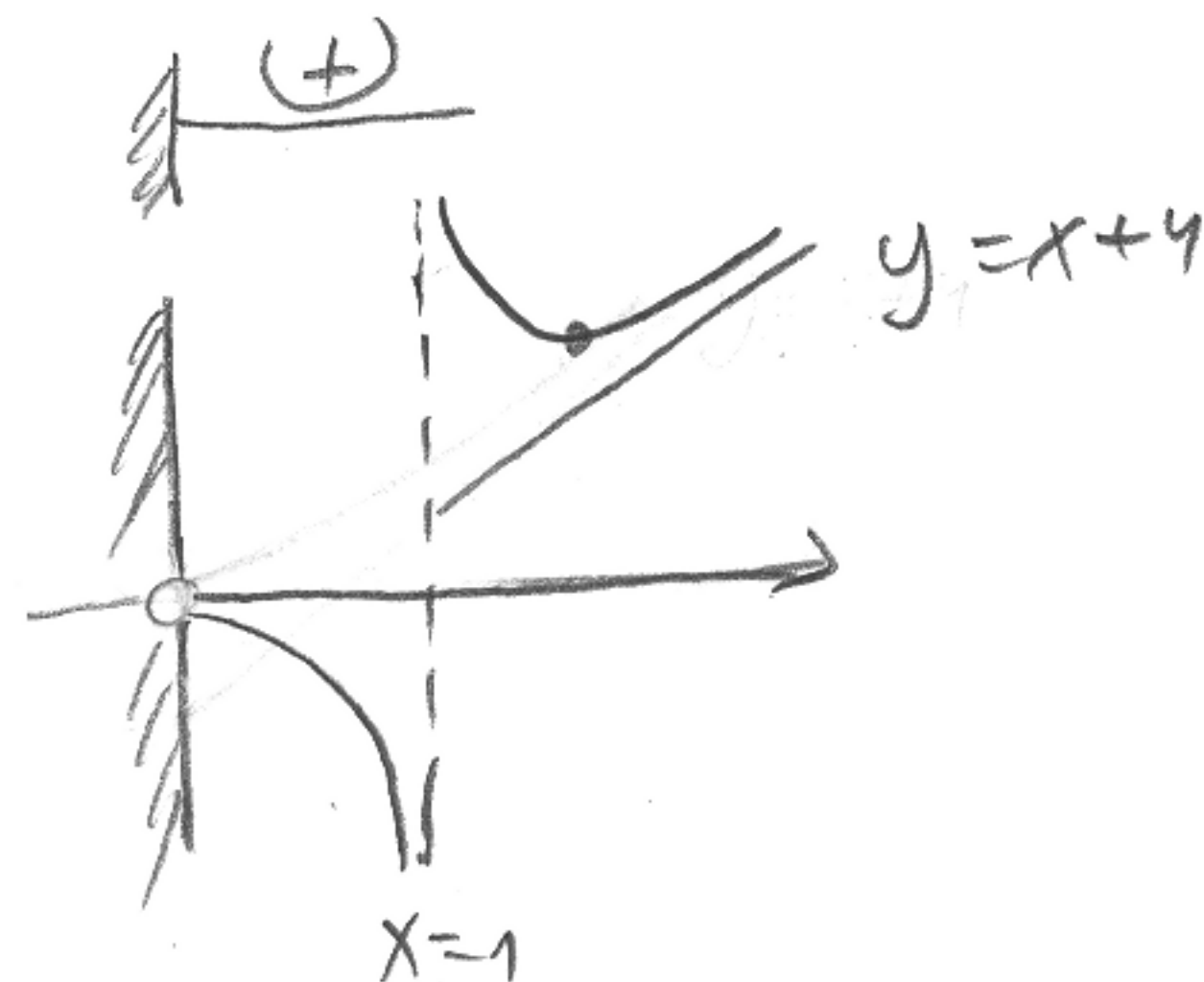
$$x-1 = -2$$

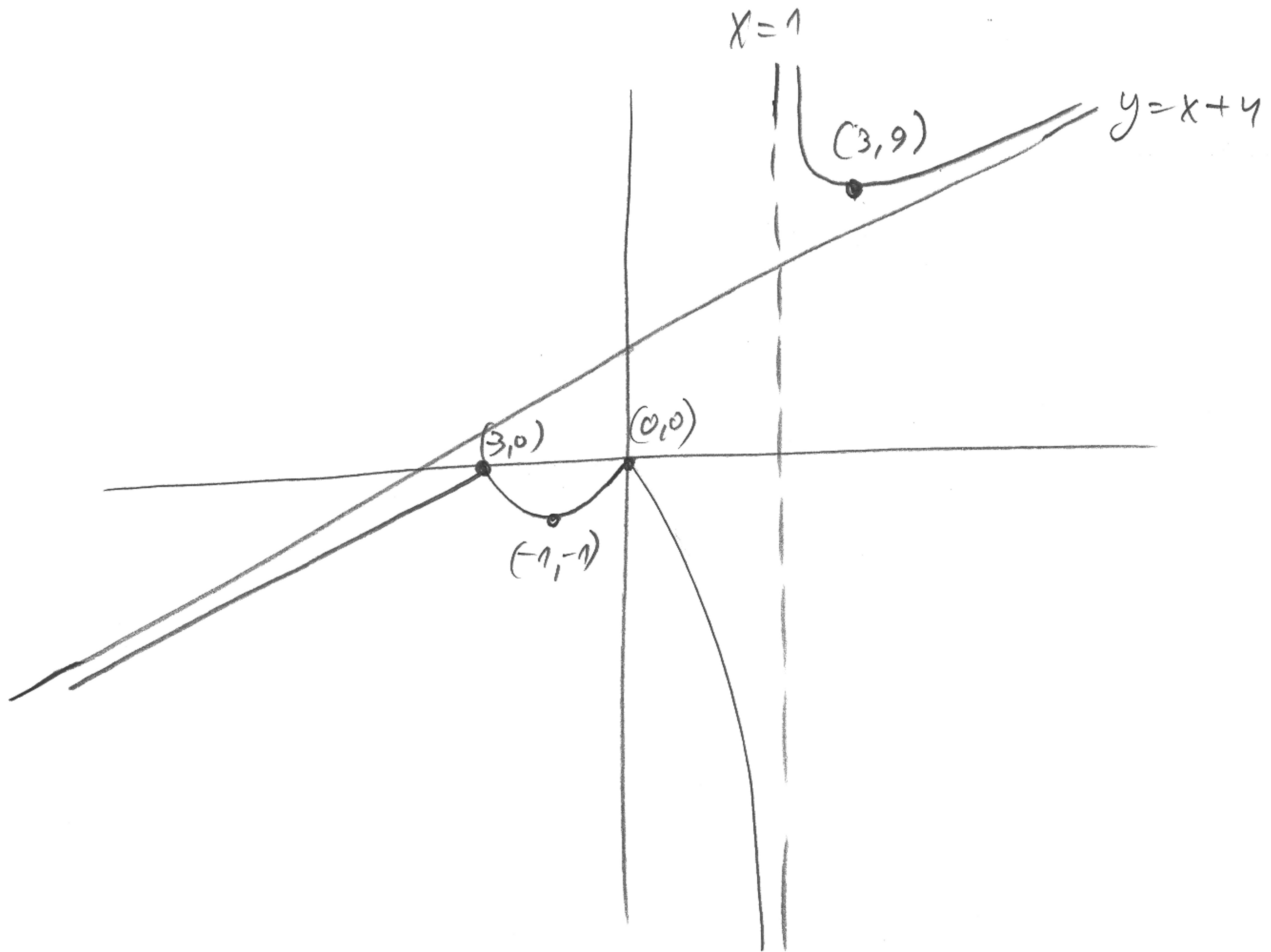
$$x = -1$$

\emptyset



$$y'' = (-4(x-1)^{-2})' = 8(x-1)^{-3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$





2 Punkte

$$\textcircled{c} (a+1)e^x - e^x \cdot x + c$$

$$c)' = (a+1)e^x - (e^x \cdot x + e^x \cdot 1) = e^x(a+1-x-1) = (a-x)e^x$$

$$\textcircled{d} y''(x) = \overset{a=3}{(3-x)}e^x$$

$$(4, 2+e^4)$$

$$y'(x) = \int (3-x)e^x dx$$

$$y'(x) = (4-x)e^x + c$$

$$y'(4) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$y'(x) = \overset{a=4}{(4-x)}e^x$$

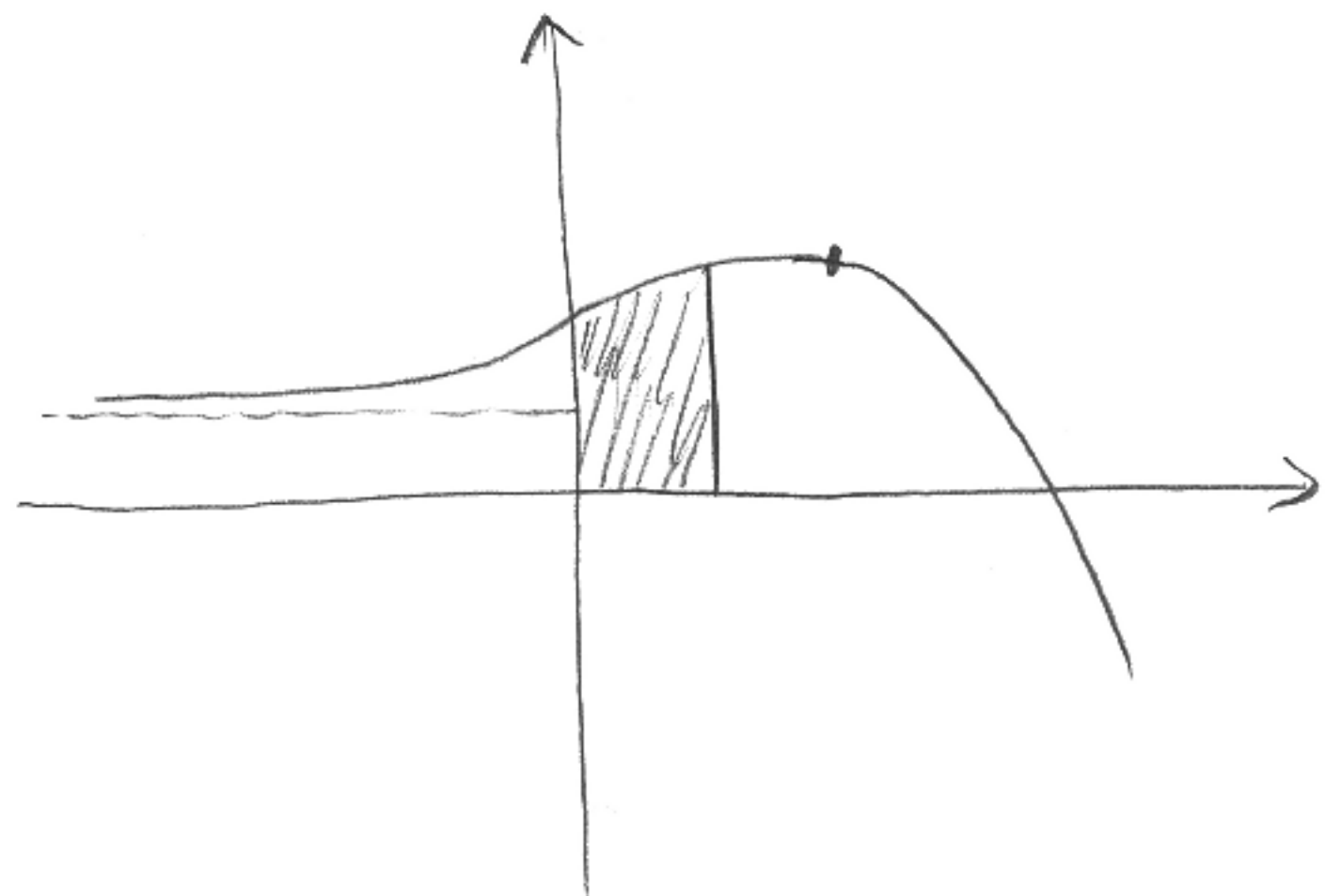
$$y(x) = \int (4-x)e^x = (5-x)e^x + c$$

$$y = (5-x)e^x + c$$

$$2+e^4 = (5-4)e^4 + c$$

$$c = 2$$

$$\boxed{y = (5-x)e^x + 2}$$



$$\int_0^3 (5-x)e^x + 2 dx$$

$$(6-x)e^x + 2x \Big|_0^3 = (3e^3 + 6) - (6e^0 + 0)$$
$$3e^3 + 6 - 6 = \underline{\underline{3e^3}}$$

13, 10 K

(k)

$$a_{26} = 3b_{15}$$

$$a_1 + 25d_1 = 3(b_1 + 14d_2)$$

$$a_1 + 25d_1 = 3b_1 + 42d_2$$

$$2a_1 + 50d_1 = 6b_1 + 84d_2$$

$$2a_1 - 6b_1 = 84d_2 - 50d_1$$

$$84d_2 - 50d_1 = 42d_2 - 29d_1$$

$$42d_2 = 21d_1 \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{42}{21} = 2$$

$$a_1 + 25(2d_2) = 3b_1 + 42d_2$$

$$\boxed{a_1 = 3b_1 - 8d_2}$$

$$\frac{30}{2}(2a_1 + 29d_1) = 6 \cdot \frac{15}{2}(2b_1 + 14d_2)$$

$$15(2a_1 + 29d_1) = 3 \cdot 15(2b_1 + 14d_2)$$

$$2a_1 + 29d_1 = 6b_1 + 42d_2$$

$$2a_1 - 6b_1 = 42d_2 - 29d_1$$

$$\boxed{d_1 = 2d_2}$$

היגיון e - b_n יהיה שלם כי ז'5

5c 3b_n כחול ז'5

כך d₂ יהיה (ז'5 כי ז'5) 5c ז'5 8d₂ כחול

כי ז'5 (3b_n) כחול ז'5 (8d₂) כחול נותן

5c ז'5 ז'5 / ז'5 a_n = 3b_n - 8d₂ כי ז'5 יגדל זה-הוא

היגיון e - b_n יהיה שלם כי ז'5

5c 3b_n כחול כי ז'5

ז'5 d₂ יהיה סביר (d₂ = $\frac{3}{8}$) כי זה סיוצמ'ם אגז - 8

ז'5 ז'5 (שלם) 5c ז'5 8d₂ יהיה כי ז'5

5c a_n = 3b_n - 8d₂ יהיה כי ז'5 כחול כי ז'5 / ז'5 אסכנ ז'5

! ז'5 / ז'5 המ'קב אכעס!

②

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$y = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 1$$

3 nokte

$$\left(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}\right)$$

$$(1, 3) \text{ MW}$$

$$(2, 5) \text{ MAX}$$

$$a_1 = 5$$

$$q = 3$$

$$\frac{5(3^6 - 1)}{3 - 1} < 2000$$

$$5(3^6 - 1) < 4000$$

$$3^6 - 1 < 800$$

$$3^6 < 801$$

$$\boxed{729 < 801}$$

$$3^6 = (3^3)^2 = 27^2$$

$$(20+7)^2 = 400 + 280 + 49$$

$$729$$

יש להוכיח

(K) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n+1} > n \cdot 2^{n+3}$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n+2) \cdot 2^{n+2} + (n+3) \cdot 2^{n+3} > (n+1) \cdot 2^{n+5}$ קט'ק ה' $\sqrt{\quad}$
ה'ה' $\sqrt{\quad}$

$n \cdot 2^{n+3} + (n+2) \cdot 2^{n+2} + (n+3) \cdot 2^{n+3} \geq (n+1) \cdot 2^{n+5}$ 'ס'
/: 2^{2n}

$n \cdot 8 + (n+2) \cdot 4 + (n+3) \cdot 8 \geq (n+1) \cdot 32$

$\underline{8n} + \underline{8n} + 8 + \underline{16n} + 24 \geq \underline{32n} + 32$

$32 \geq 32$

② $101^n + (7^1 + 7^2 + \dots + 7^{4n-1})$

$$\left. \begin{array}{l} 101 + 7 + 7^2 + 7^3 \\ 108 + 49 + 343 \\ 500 \checkmark \end{array} \right\}$$

$$101^n - 101 + (7^1 + \dots + 7^{4n-1} + 7^{4n} + 7^{4n+1} + 7^{4n+2} + 7^{4n+3})$$

$$\frac{101^n + 7 + \dots + 7^{4n-1}}{100} + \frac{100 \cdot 101^n}{100} + \frac{7^{4n} + 7^{4n+1} + 7^{4n+2} + 7^{4n+3}}{100}$$

$\frac{7^{4n}(1 + 7 + 49 + 343)}{100}$

סעיף ג



$$\frac{7^{4n} \cdot 400}{100}$$



$$\frac{\cot 2x}{\cot x} + \frac{\cot x}{\cot 2x} + 2 = 0$$

$$\omega + \frac{1}{\omega} + 2 = 0$$

$$\omega^2 + 2\omega + 1 = 0$$

$$(\omega + 1)^2 = 0$$

$$\omega = -1$$

$$0 < x < 2\pi \quad (5 \text{ } \lambda \text{ } \text{fre})$$

$$\cot 2x = -\cot x$$

$$\cot 2x = \cot(180 - x)$$

$$2x = 180 - x + 180k$$

$$3x = 180 + 180k$$

$$x = 60 + 60k$$

$$\frac{\cot 2x}{\cot x} = \omega$$

$$x = 60$$

$$x = 120$$

$$\text{DANN } x = 180 \quad \emptyset$$

$$x = 240$$

$$x = 300$$

$$\cot x \neq 0$$

$$\cot 2x \neq 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$\sin x \neq 0$$

$$\sin 2x \neq 0$$

$$x \neq 90, 270$$

$$x \neq 45 + 90k$$

$$x \neq 0, 180, 360$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}$$

?

$$(2\cos 2x + 5) (\sin^4(x - 270) - \cos^4(x + 630)) \leq 3$$

$$(\cos^4 x - \sin^4 x)$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$1 \cdot \cos 2x$$

$$\cos 2x = t$$

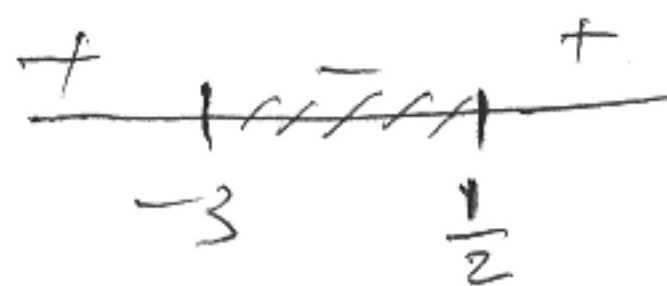
$$t(2t + 5) - 3 \leq 0$$

$$2t^2 + 5t - 3 \leq 0$$

$$2t^2 + 6t - t - 3 \leq 0$$

$$2t(t + 3) - 1(t + 3) \leq 0$$

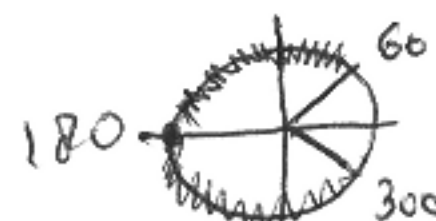
$$(t + 3)(2t - 1) \leq 0$$



$$-1 \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}$$

$$60 < 2x \leq 300$$

$$30 \leq x \leq 150$$



$$\sin(x - 270)$$

$$\sin(x + 90)$$

$$\cos x$$

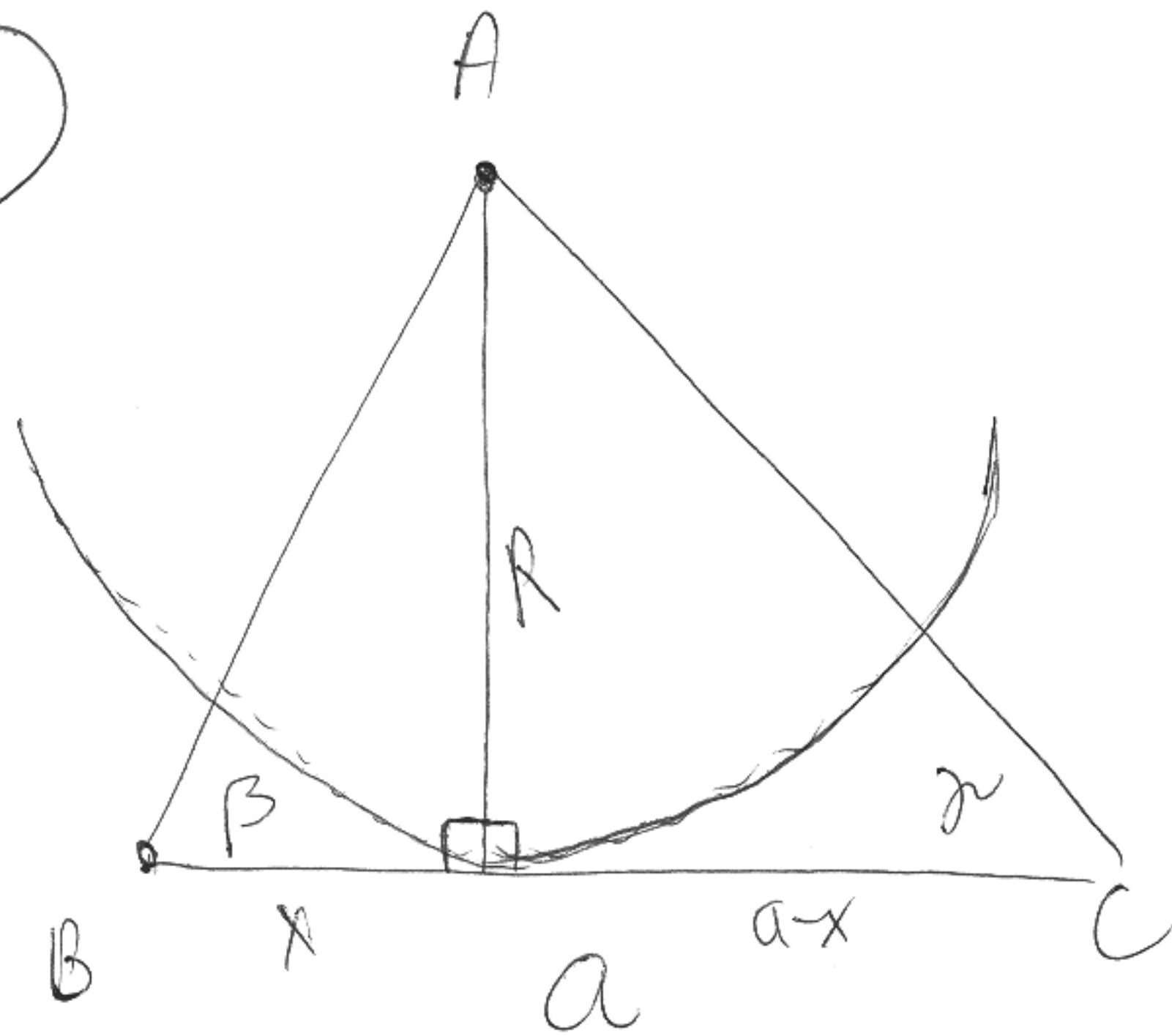
$$\cos(x + 630)$$

$$\cos(270 + x)$$

$$\sin x$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

(k)



$$\frac{R}{a} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\angle BAC = 60$$

$$\beta + \gamma = 180 - 60$$

$$120$$

$$\beta = 120 - \gamma$$

$$\frac{R}{a} = \frac{\sin(120 - \gamma) \sin \gamma}{\sin 120}$$

(6 a) (re)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{x} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{R}{a-x}$$

$$x = R \cot \beta \quad a-x = R \cot \gamma$$

$$a = R (\cot \gamma + \cot \beta)$$

$$a = R \left(\frac{\cos \gamma \sin \beta + \cos \beta \sin \gamma}{\sin \gamma \sin \beta} \right)$$

$$\boxed{\frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = R}$$

$$\left(\frac{\sin(120-\alpha) \sin \alpha}{\sin(60+\alpha) \sin \alpha} \right)' = \cos(60+\alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \sin(60+\alpha)$$

$$\sin(60+2\alpha) = 0$$

$$60+2\alpha = 180$$

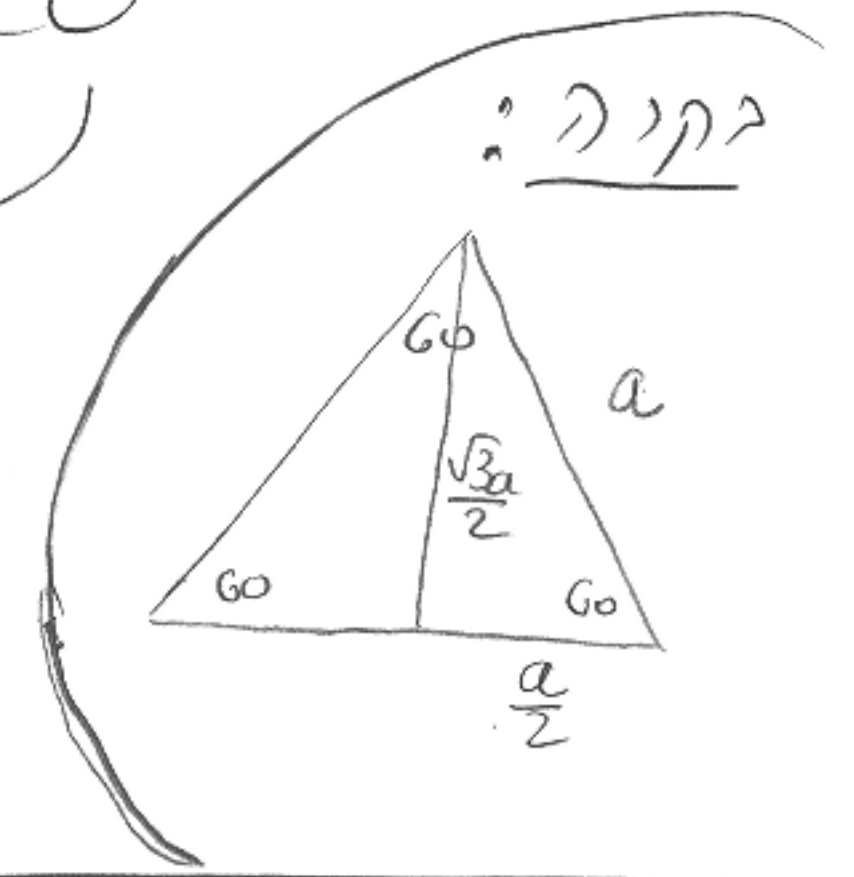
$$2\alpha = 120$$

$$\alpha = 60$$

$$C'' = 2 \cos(60+2\alpha)$$

$$C''_{\alpha=60} < 0$$

MAX



$$\frac{R}{a}_{MAX} = \frac{\sin(120-60) \cdot \sin 60}{\sin 120} = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = c = a \quad \beta = 30 \quad \gamma = 45$$

$$\angle BAC = 105$$

$$R = \frac{a \sin 30 \sin 45}{\sin 75} = \frac{a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}a}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{360-105}{360} \cdot 2\pi R = \frac{255}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot a$$

$$\frac{51}{72} (\sqrt{3}-1) \pi a = \frac{17}{24} (\sqrt{3}-1) \pi a = \frac{17(\sqrt{3}-1)}{6} \cdot \pi$$

$$\frac{a}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2} a}$$