04.04.2014

המרכז לחינוך קדם-אקדמי

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

להשתמש בדפי הנוסחאות המצ[illegible]

יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת!!

מבחן טרימסטר ב׳ במתמטיקה

משך המבחן: 3.5 שעות. יש לפתור את **כל** השאלות!

אין להשתמש במחשבונים! **אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!**

סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!

<u>בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!</u>

אם במכנה של ביטוי כלשהו מופיעים שורשים – יש להשתחרר מהאי-רציונליות במכנה.

<u>כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!</u>

<u>כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!</u>

<u>תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!</u>

<u>יש להתחיל כל שאלה בדף חדש!</u>

שאלה 1 (14%)

סכום של טור גיאומטרי אינסופי מתכנס $a_1+a_2+\ldots$ שווה 9.

בעזרת איברי הטור הנ״ל יוצרים טור חדש: $a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+a_3\cdot a_4+a_4\cdot a_5+\ldots$.

7% א. הוכח שגם הטור החדש הוא טור גיאומטרי מתכנס.

7% ב. מצא את a_1 אם ידוע כי סכום כל האיברים של הטור השני הוא $\frac{27}{2}$.

שאלה 2 (14%)

9% א. הוכח כי לכל α המקיימת: $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ולכל n טבעי מתקיים:

$$\cos^2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 5\alpha+\ldots+\cos^2(2n-1)\alpha=\frac{n}{2}+\frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}.$$

5% ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ בתחום $-1\le x\le 1$.

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר ע״י סיבוב של גרף הפונקציה סביב ציר x.

שאלה 3 (20%)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x}-2x+1}$.

5% א. מצא את a אם ידוע שהמשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=4$ יוצר זווית בת 30° עם הכיוון החיובי של ציר x.

ב. חקור את הפונקציה כאשר $a=2$:

2% 1. תחום הגדרה.	1% 2. נקודות חיתוך עם הצירים.
3% 3. אסימפטוטות.	2% 4. תחומי עליה וירידה.
1% 5. נקודות קיצון.	2% 6. צייר רְשׁוּמַת (סקיצה) של הגרף.

4% ג. עבור אילו ערכים של m לא קיים x שמקיים את המשוואה $(2+2m)x-\sqrt{x}=1$?

שאלה 4 (18%)

מנקודה A על מעגל שרדיוסו R מעבירים מיתר AD וקוטר AB. נסמן $\sphericalangle BAD = \alpha$.
על הקשת BD בוחרים נקודה C. נסמן $\sphericalangle CAB = \beta$. נתון: $\beta < \alpha$.

9% א. הוכח ששטח המרובע ABCD שווה ל- $R^2\left(\sin^2\alpha\sin 2\beta + \sin 2\alpha\cos^2\beta\right)$.

9% ב. בהנחה שזווית α נתונה וקבועה,
הוכח ששטח המרובע ABCD הוא מקסימאלי כאשר AC הוא חוצה זווית $\sphericalangle BAD$.

שאלה 5 (18%)

8% א. הוכח שלמשוואה $\cos 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}$ אין פתרונות.

10% ב. מצא את כל ה-x-ים מהקטע $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ המקיימים: $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \left(1 - \frac{2}{\cos x}\right)\cdot\cos 2x \le 0$.

שאלה 6 (16%)

במשולש ABC $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$.

9% א. השב את האורך של חוצה-הזווית של זווית A.

7% ב. השב במשולש ABC את אורך הגובה היורד מקדקוד B.

בהצלחה!

$\boxed{\text{שאלה 1}}$

נתון:

$$\frac{a_1}{1-q}=9$$

$$a_1=9(1-q)$$

$$a_1^2=9^2(1-q)^2$$

א

סדרה חדשה: $a_n\cdot a_{n+1},\ a_{n+1}\cdot a_{n+2}$

$$q^*=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{\cancel{a_n}\cdot\cancel{q}\cdot a_n\cdot q^2}{\cancel{a_n}\cdot a_n\cdot\cancel{q}}=q^2$$

מ.ש.ל

ב

$$\frac{a_1\cdot \overset{a_1 q}{\overset{\downarrow}{a_2}}}{1-q^2}=\frac{27}{2}$$

$$2a_1^2 q=27(1-q)(1+q)$$

$$2\cdot 9^2(1-q)^2 q=27(1-q)(1+q) \qquad q\neq 1$$

$$2\cdot \overset{3}{\cancel{81}}(1-q)\cdot q=\cancel{27}(1+q)$$

$$6q(1-q)=1+q \Rightarrow 6q^2-5q+1=0$$

$$6q^2 - 3q - 2q + 1 = 0$$

$$3q(2q-1) - 1(2q-1) = 0$$

$$(2q-1)(3q-1) = 0$$

$q = \frac{1}{2}$ | $q = \frac{1}{3}$

$a_1 = 9\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ | $a_1 = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \frac{2}{3}$

$\boxed{a_1 = 4{,}5}$ B $\boxed{a_1 = 6}$

שאלה 2

א) $\cos^2\alpha + \cos^2 3\alpha + \dots + \cos^2(2n-1)\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}$

בדיקה ✓

הנחה ✓

צ"ל $(n+1)$

$$\underbrace{\cos^2\alpha + \dots + \cos^2(2n-1)\alpha}\, + \cos^2(2n+1)\alpha = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin(4n+4)\alpha}{4\sin 2\alpha}$$

$$\cancel{\frac{n}{2}} + \frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha} + \cos^2(2n+1)\alpha = \cancel{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{\sin(4n+4)\alpha}{4\sin 2\alpha}$$

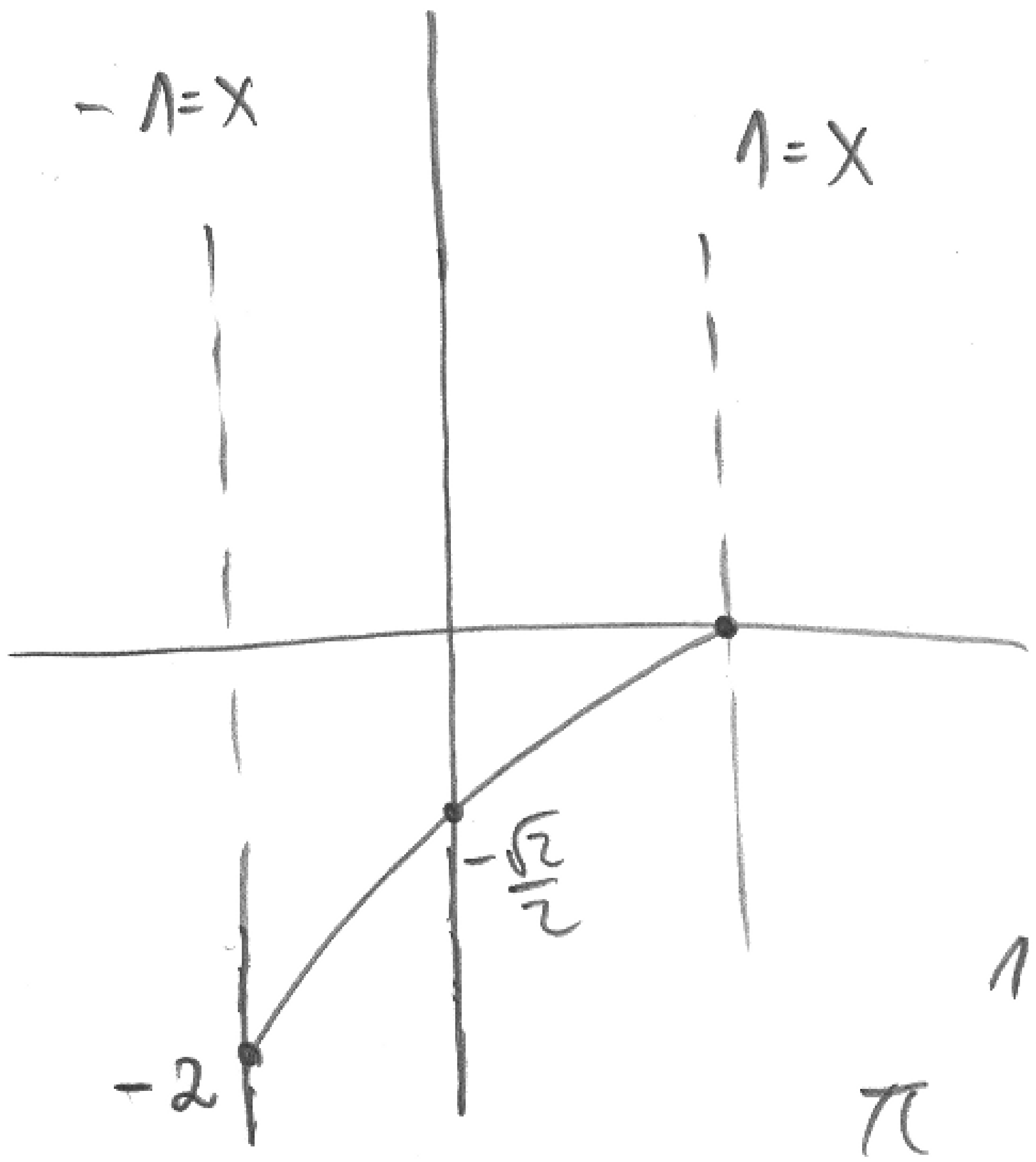
$$\cos^2(2n+1)\alpha - \frac{1}{2} = \frac{\sin(4n+4)\alpha - \sin(4n)\alpha}{4\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2\cos^2(2n+1)\alpha - 1}{2} = \frac{\cancel{2}\cancel{\sin 2\alpha}\cos(4n+2)\alpha}{2\cancel{4}\cancel{\sin 2\alpha}}$$

$$\frac{\cos(4n+2)\alpha}{2} = \frac{\cos(4n+2)\alpha}{2}$$

מ.ש.ל

7



$(-1,-2)$

$$\pi \int_{-1}^{1} \frac{x^2-2x+1}{x+2}\,dx$$

x^2-2x+1

$x(x+2)-4x+1$

$\frac{x(x+2)}{x+2}-\frac{4(x+2)}{x+2}+\frac{9}{x+2}$

$$\pi \int_{-1}^{1} x-4+\frac{9}{x+2}\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}-4x+9\ln|x+2|\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$\pi\left[\left(\frac{1}{2}-4+9\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}+4+9\ln 1\right)\right]=\pi\left[\cancel{\tfrac{1}{2}}-4+9\ln 3-\cancel{\tfrac{1}{2}}-4\right]$$

$$\boxed{\pi\left(9\ln 3-8\right)} \quad V$$

שאלה 3

א

$$y=\frac{ax}{\sqrt{x}-2x+1}$$

$$\frac{a(\sqrt{x}-2x+1)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)(ax)}{(\sqrt{x}-2x+1)^2}=tg\,30$$

$$\frac{a(\overbrace{2-8+1}^{-5})-\left(\frac{1}{4}-2\right)(4\cdot a)}{\underbrace{(2-8+1)^2}_{25}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\overbrace{-5a-a+8a}^{2a}}{25}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$6a=25\sqrt{3}$$

$$\boxed{a=\frac{25\sqrt{3}}{6}}$$

ד

$$y=\frac{2x}{\sqrt{x}-2x+1}$$

א

$\boxed{x\geq 0}$

$\sqrt{x}-2x+1\neq 0$

$\sqrt{x}\neq 2x-1$

$x\neq 4x^2-4x+1$

$0\neq 4x^2-5x+1$

$0\neq 4x^2-4x-x+1$

$0\neq 4x(x-1)-1(x-1)$

$0\neq (4x-1)(x-1)$

$\boxed{\cancel{x\neq \frac{1}{4}}}$ $\boxed{x\neq 1}$

מתקבל

ב $x=0$ $(0,0)$

ג

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x=1}$$

אסימפטוטה
אנכית

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{x}-2x+1)}=\frac{2}{\sqrt{x}-2x+1}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x}-2x+1}=\frac{x(2)}{x(\frac{1}{\sqrt{x}}-2+\frac{1}{x})}=-1$$

$\boxed{y=-1}$

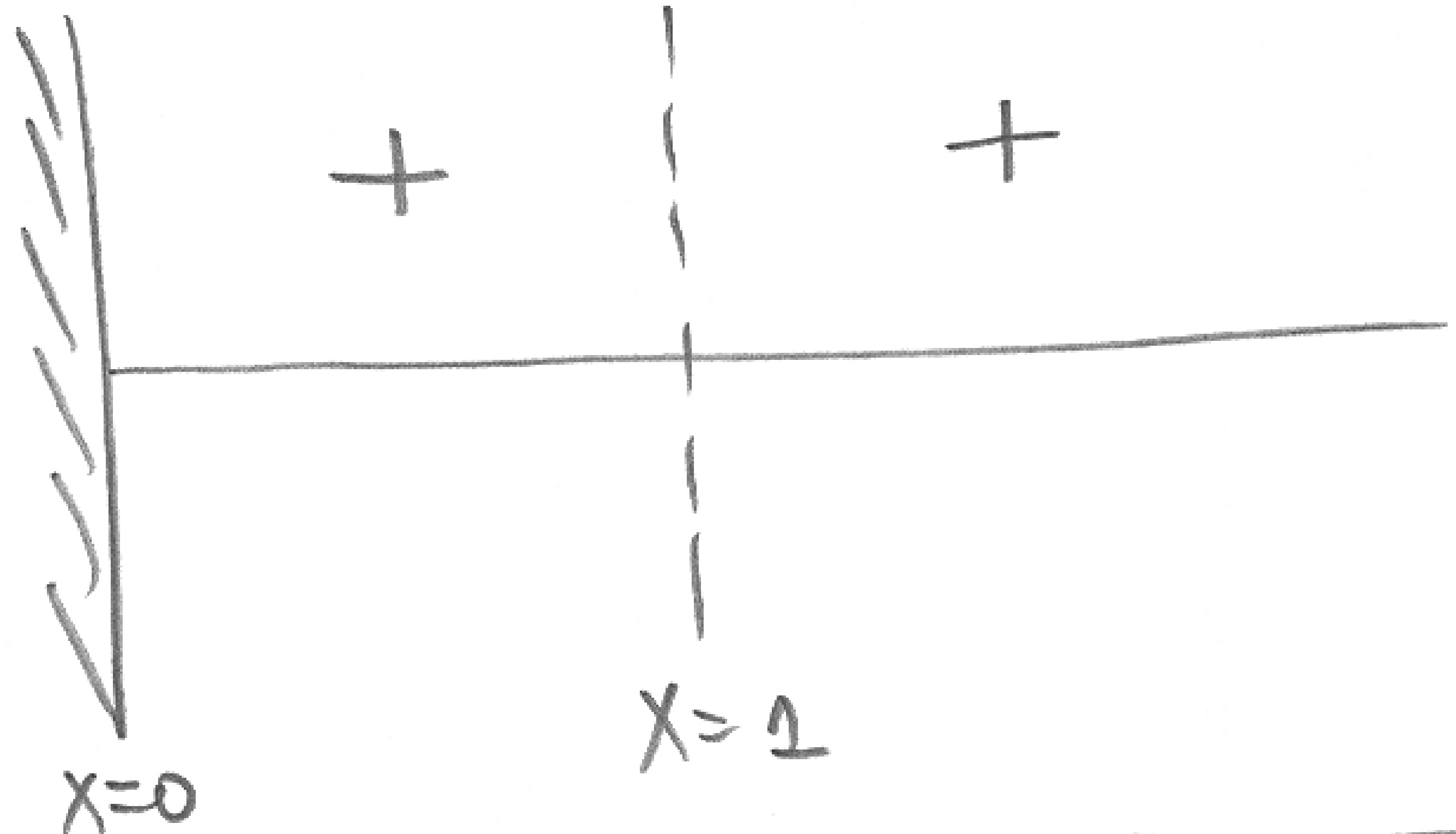
אסימפטוטה
אופקית

ה+ו

$$\frac{2(\sqrt{x}-2x+1)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)(2\sqrt{x})}{(\ )^2} =$$

$\underline{x \geq 0}$

$$2\sqrt{x}-4x+1-\sqrt{x}+4x =$$



$\sqrt{x}+1$

$\Downarrow$

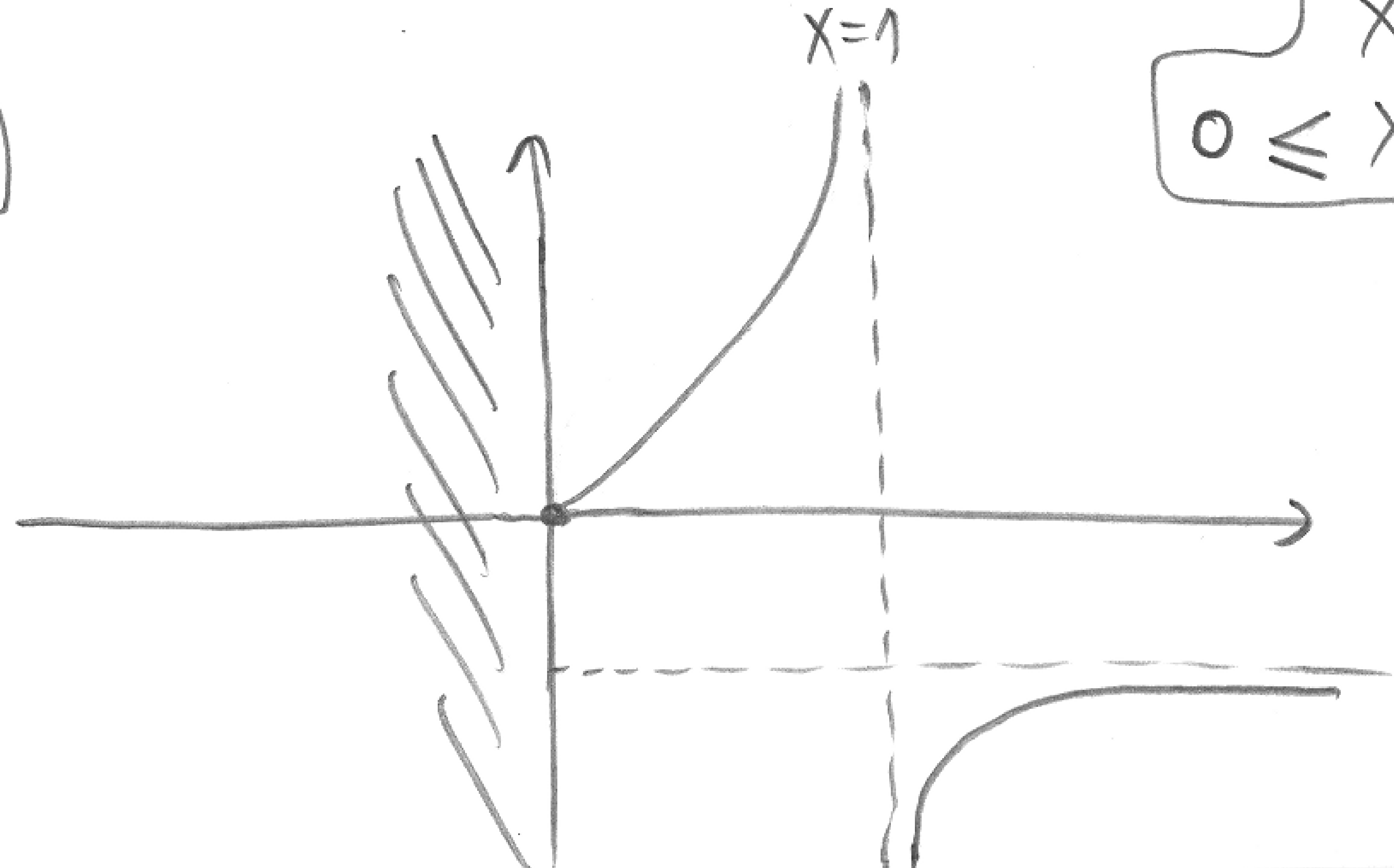
תמיד חיובי

$\Downarrow$

$\boxed{\text{אין קיצון}}$

עולה:
$x > 1$
$0 \leq x < 1$

1



(2)

$$x(2+2m)-\sqrt{x}=1$$

$$2x+2mx-\sqrt{x}=1$$

$$2x-\sqrt{x}-1=-2mx$$

$$\sqrt{x}-2x+1=2mx$$

$m \neq 0$

$\sqrt{x}-2x+1 \neq 0$

$$\frac{1}{m}=\underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x}-2x+1}}_{\text{לפי הגרף}}$$

$$-1 \le \frac{1}{m} < 0 \Rightarrow \frac{1}{m}<0$$ וגם $$\frac{1}{m} \ge -1$$

$\boxed{m<0}$

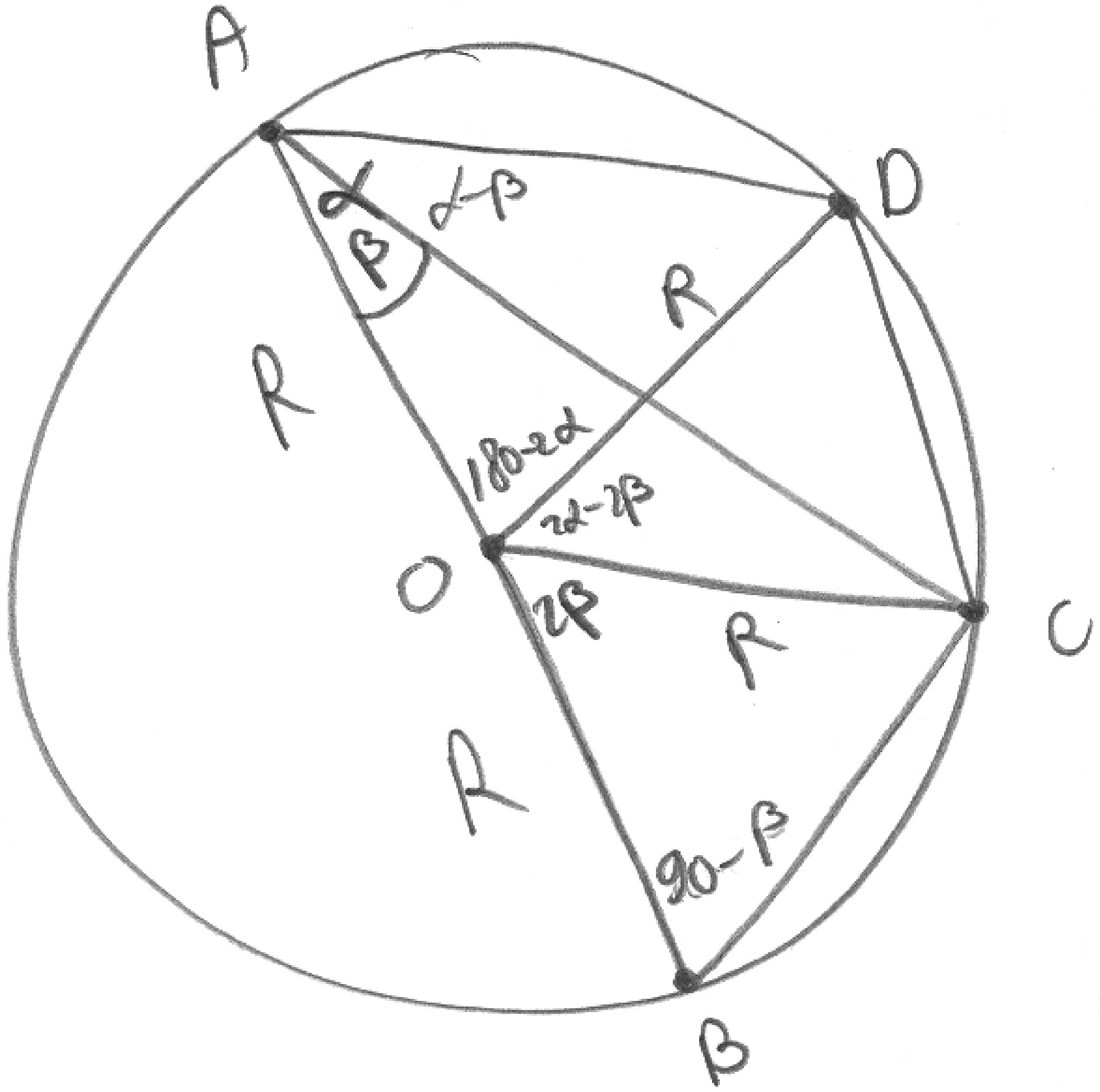
$$\frac{1+m}{m} \ge 0$$

$+ \quad - \quad +$; $-1 \quad 0$

$\Rightarrow$ א $\boxed{\begin{matrix} m \ge 0 \\ m \le -1 \end{matrix}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{m \le -1}$

שאלה 4

ג



$$S_{\triangle AOD} + S_{\triangle DOC} + S_{\triangle COB}$$

$$\frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin(2\alpha - 2\beta)}{2}$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta\right)$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\sin 2\alpha(1+\cos 2\beta) + \sin 2\beta(1-\cos 2\alpha)\right)$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2\beta + \sin 2\beta \cdot 2\sin^2\alpha\right)$$

$$\boxed{S = R^2\left(\sin^2\alpha \sin 2\beta + \cos^2\beta \sin 2\alpha\right)}$$

(2)

$$S' = R^2\left(\sin^2\alpha \cos 2\beta \cdot 2 + \sin 2\alpha \cdot 2\cos\beta(-\sin\beta)\right) = 0$$

$$\cancel{2}\cos 2\beta \sin^2\alpha - \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha \sin 2\beta = 0$$

$$\sin\alpha\left(\cos 2\beta \sin\alpha - \sin 2\beta \cos\alpha\right)$$

$$\cos 2\beta \sin\alpha = \sin 2\beta \cos\alpha$$

$$tg\,\alpha = tg\,2\beta$$

$$2\beta = \alpha$$

([illegible]) $\beta = \frac{\alpha}{2}$ MAX

$$S'' = -\sin\alpha \cdot 2\sin 2\beta - \cos\alpha \cdot 2\cos 2\beta$$

$$S''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\alpha \cdot 2\sin\alpha - \cos\alpha \cdot 2\cos\alpha = -2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -2 < 0$$

שאלה 5

ב

$$\cos 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2}\,\sin(2x+45) = \frac{3}{2}$$

$$\sin(2x+45) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(2x+45) = \underset{\text{1-מ}}{\text{גדול}}$$

$$\Downarrow$$

$$\emptyset$$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$$

$$3 > 2\sqrt{2}$$

$$9 > 4 \cdot 2$$

$$9 > 8 \checkmark$$

$$-1 \le \sin\alpha \le 1$$

ג

$$\tan x - \sin 2x - \left(1 - \frac{2}{\cos x}\right)\cdot \cos 2x \le 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{\cos x} \le 0 \quad / \cdot \cos x$$

חיובי
בתחום

$$\cos x \ne 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x > 0$$

$$\sin x-\cos x\sin 2x-\cos 2x\cos x+2\cos 2x\leq 0$$

$$\sin x-2\sin x\cos^2 x-\cos 2x\cos x+2\cos 2x\leq 0$$

$$\sin x(1-2\cos^2 x)+\cos 2x(2-\cos x)\leq 0$$

$$\sin x\cdot(-\cos 2x)+\cos 2x\,(2-\cos x)\leq 0$$

$$\cos 2x\,(-\cos x+2+\sin x)\leq 0$$

$$\cos 2x\,(\sin x-\cos x+2)\leq 0$$

$$\cos 2x\,(\underbrace{\sqrt{2}\sin(x-\tfrac{\pi}{4})+2}_{\text{חיובי}})\leq 0$$

$$\cos 2x\leq 0$$

$$-1\leq \sin(x-\tfrac{\pi}{4})\leq 1$$

$$-\sqrt{2}\leq\sqrt{2}\sin(x-\tfrac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$$

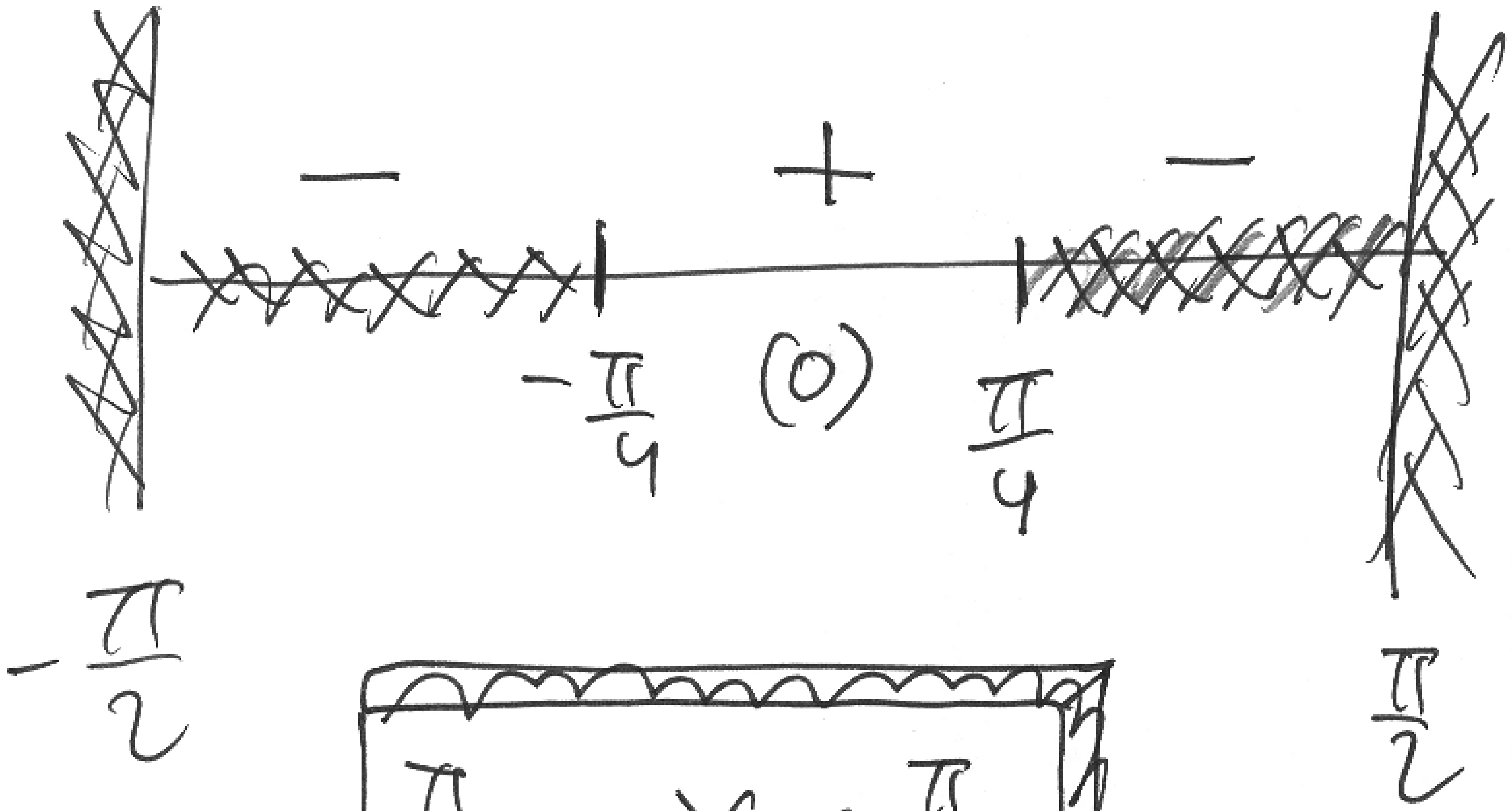
$$-\sqrt{2}+2\leq \underbrace{\sqrt{2}\sin(x-\tfrac{\pi}{4})+2}_{\text{כולה חיובי}}\leq\sqrt{2}+2$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad x = -\frac{\pi}{4}$$

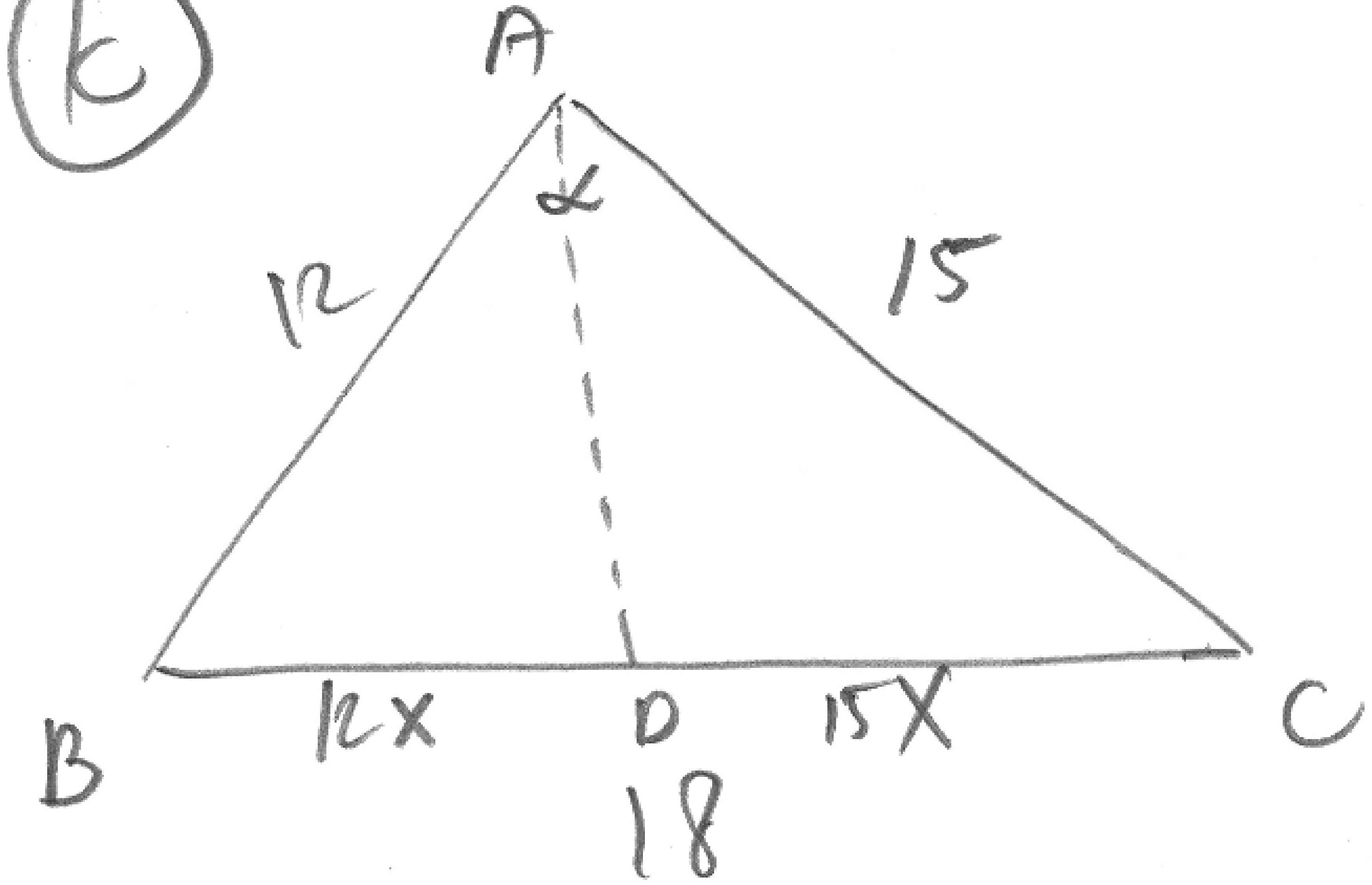


$$\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x \le -\frac{\pi}{4}$$

שאלה 6

א



$$P = \frac{12+15+18}{2} = \frac{45}{2}$$

א

$12x + 15x = 18$

$27x = 18$

$x = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$BD = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 8$

$DC = 15\left(\frac{2}{3}\right) = 10$

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

$AD^2 = 12 \cdot 15 - 8 \cdot 10$

$AD^2 = 180 - 80$

$\boxed{AD = 10}$

משפט של
חוצה זווית

② $\dfrac{h_B \cdot 15}{2} = \sqrt{\frac{45}{2}\left(\frac{45}{2}-12\right)\left(\frac{45}{2}-15\right)\left(\frac{45}{2}-18\right)}$

נוסחת הרון

$'' = \sqrt{\dfrac{45(45-24)(45-30)(45-36)}{16}}$

$'' = \sqrt{\dfrac{45\cdot 21\cdot 15\cdot 9}{16}} = \sqrt{\dfrac{5\cdot 9\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 9}{16}}$

$$\frac{h\cdot\cancel{15}}{\cancel{2}} = \sqrt{\frac{5^2\cdot 9^2\cdot 3^2\cdot 7}{16}} = \frac{\cancel{5\cdot}9\cancel{\cdot 3}\cdot\sqrt{7}}{\cancel{4}\,2}$$

$$\boxed{h = \frac{9\sqrt{7}}{2}}$$

פרק אחרון!

$$324 = 144 + 225 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot \cos\alpha$$

$$2\cdot 12\cdot 15\cdot \cos\alpha = 144 + 225 - 324$$

$$2\cdot 12\cdot \cancel{15}\cdot \cos\alpha = \cancel{45}\ 3$$

$$2\cdot 12\cdot \cos\alpha = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\frac{12\cdot \cancel{15}\cdot \sin\alpha}{\cancel{2}} = \frac{h\cdot \cancel{15}}{\cancel{2}}$$

$$12\cdot \frac{\sqrt{63}}{8} = h$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot \sqrt{9}\cdot \sqrt{7}}{\cancel{8}\ 2} = \frac{3\cdot 3\sqrt{7}}{2}$$

$$\boxed{\frac{9\sqrt{7}}{2}}$$