

בחינת בגרות במתמטיקה

הנחיות לנבחן:

- א. משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.
 ב. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
 ג. מותר להשתמש: בדפי הנוסחאות וברשימת המשפטים בגיאומטריה המישור המצורפים, במחשבון מדעי בעל צג בן שתי שורות לכל היותר.
 ד. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
 ה. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (8%)

שורשי המשוואה $(m+2)x^2 - 2x - 3 = 0, m \neq -2$ מקיימים $\frac{3}{x_1+2} + \frac{3}{x_2+2} = \frac{34}{11}$. מצא את השורשים x_1, x_2 .

שאלה 2 (10%)

פתור: $\sqrt{1-3(\log_{0.1} x)^2} + 2\log_{0.1} x < 1$

שאלה 3 (10%)

הוכח כי עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left(\sum_{m=0}^{n+2} \frac{1}{n+2m} < 2\right)$ $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{3n+4} < 2$

שאלה 4 (12%)

6% א. עבור אילו ערכים של a ו- b גרף הפונקציה $f(x) = \frac{(x-2b)^2}{x^2 - a^2}$ עובר דרך הנקודה $(-6, 2)$ ויש לו אסימפטוטה אנכית אחת בלבד?

6% ב. מצא את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$, $1 \leq x \leq 3$ סביב ציר ה- x .

שאלה 5 (10%)

המעגל $5x^2 + 5y^2 + 10x = 13$ חסום בריבוע שאחת מצלעותיו מונחת על הישר $x + 3y = 5$. מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות שאר צלעות הריבוע.

שאלה 6 (10%)

במלבן ABCD: $AD = 6, AB = 4$, נקודה M היא אמצע הצלע AB, $E \in BC$, המרחק בין M ל-ED שווה 2. מצא את אורכי הקטעים BE ו-EC.

שאלה 7 (10%)

אם נחלק פולינום $p(x)$ ב- $x-2$ נקבל שארית 1, אם נחלק $p(x)$ ב- $(x^3+1)^2$ נקבל שארית x^2 . מה תהיה השארית אם נחלק $p(x)$ ב- x^3-3x-2 ?

שאלה 8 (12%)

פתור $2\operatorname{tg} x - \sin x \cos^2 x \geq 4 \cos^3 x - 8$

שאלה 9 (8%)

הם שורשי המשוואה $z^4 = i$ הנמצאים ברביע הראשון, השני, השלישי והרביעי בהתאם למספרם. z_1, z_2, z_3, z_4 הוכח כי $z_2 z_1^{2015} + z_3 z_2^{2015} + z_4 z_3^{2015} + z_1 z_4^{2015} = \sqrt{8}(1+i)$

שאלה 10 (10%)

ריבוע ABCD הוא בסיס של הפירמידה הישרה SABCD. אורך המקצוע SA שווה a , הזווית בין SA לבין SB שווה 60° . מצא את רדיוס הכדור החוסם את הפירמידה.

בהצלחה!

①

$$(m+2)x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$m \neq -2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{m+2}$$

$$a = m+2 \quad b = -2 \quad c = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{m+2}$$

$$3 \left(\frac{x_1 + x_2 + 4}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \right) = \frac{34}{11}$$

$$3 \left(\frac{\frac{2}{m+2} + 4}{\frac{-3}{m+2} + \frac{4}{m+2} + 4} \right) = \frac{34}{11}$$

$m = 6$

$$3 \left(\frac{2 + 4m + 8}{-3 + 4 + 4m + 8} \right) = \frac{34}{11}$$

$$11 \cdot 3(10 + 4m) = 34(9 + 4m)$$

$$330 + 132m = 306 + 136m$$

$$24 = 4m$$

$$(6+2)x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$8x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{34}{11}$$



????

②

$$\log_{0.1} x = t$$

$$\sqrt{1-3t^2} + 2t - 1 \leq 0$$

$$\sqrt{1-3t^2} = 1 - 2t \leftarrow \text{מיד}$$

$$1-3t^2 = 1-4t+4t^2$$

$$7t^2 - 4t = 0$$

$$t(7t-4) = 0$$

$$t = 0 \quad t = \frac{4}{7}$$

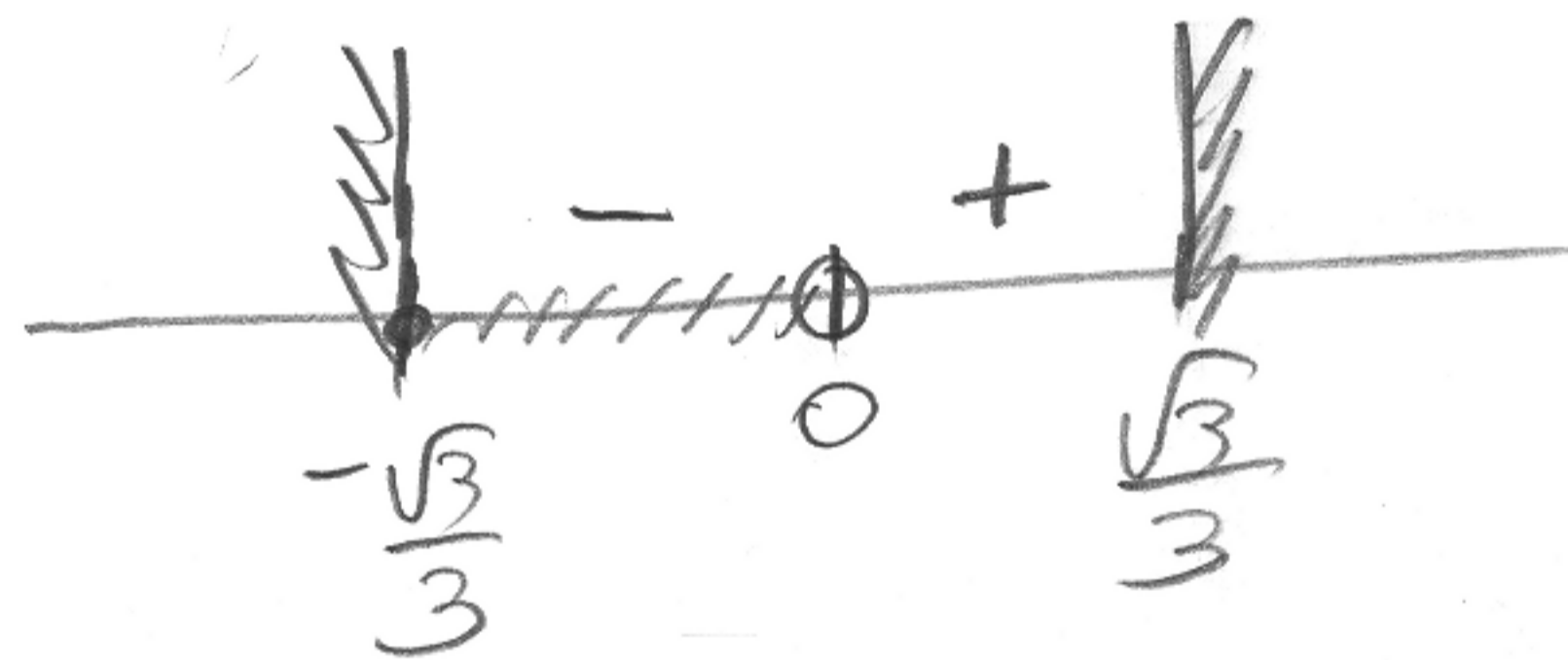
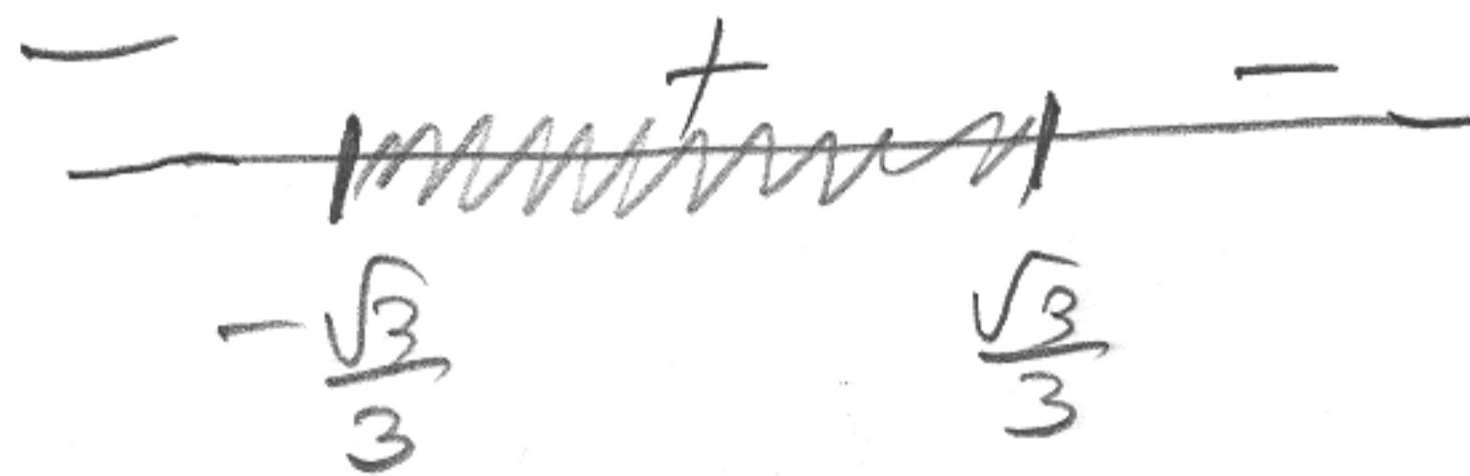
↓
סגור

סגור אש"כ האומדן 21 →

$$x > 0$$

$$1-3t^2 \geq 0$$

$$(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t) \geq 0$$



$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < t < 0$$

$$3.77 = \log_{0.1} 0.1^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq \log_{0.1} x < \log_{0.1} 1$$

$$0 < x < 1 \leq x \leq 0.1^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$1 < x \leq 3.778 \leftarrow$$

3

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+4} < 2 \quad (\text{קטן יותר})$$

$$\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+6} + \frac{1}{3n+8} + \frac{1}{3n+10} < 2$$

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n+6} + \frac{1}{3n+8} + \frac{1}{3n+10} < 2$$

$$\frac{1}{3n+8} + \frac{1}{3n+10} < \frac{1}{n} - \frac{1}{3n+6}$$

$$\frac{6n+18}{() ()} < \frac{3n+6-n}{() ()}$$

$$\frac{3 \cdot 6(n+3)}{() ()} < \frac{2(n+3)}{n(3n+6)}$$

$$3n(3n+6) < (3n+8)(3n+10)$$

$$9n^2 + 18n < 9n^2 + 54n + 80$$

$$n \rightarrow 3n+4$$

$$3n+4 = n + (w-1) \cdot 2$$

$$2n+4 = (w-1) \cdot 2$$

$$n+2 = w-1$$

$$n+3 = w \quad \text{קטן יותר} \rightarrow \text{N}$$

$$n=1 \quad \checkmark \quad \text{קטן יותר}$$

$$n=2 \quad \checkmark$$

$$n \quad \checkmark > 8 \quad \text{הגדלה}$$

$$n+2 \quad \checkmark > 8 \quad \text{הגדלה}$$

$$0 < 36n + 80$$

$$\underline{\underline{\text{לא N}}}$$

סדר האינסופי

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+4}$$

קטן $n+2$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} + n+2 \left(\frac{1}{n+2} \right)$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{n+2}{n+2} =$$

$$\frac{1}{n} + 1 < 2$$

f.e.v

$$\textcircled{9} \quad y = \frac{(x-2b)^2}{x^2 - a^2} \quad (-6, 2)$$

$$(x \neq \pm a)$$

$$2 = \frac{(6+2b)^2}{36 - a^2} \rightarrow a = \pm 6$$

$$2(36 - 4b^2) = (6 + 2b)^2$$

$$72 - 8b^2 = 36 + 24b + 4b^2$$

$$0 = 12b^2 + 24b - 36$$

$$0 = b^2 + 2b - 3$$

$$0 = (b+3)(b-1)$$

$$b = -3$$

$$b = 1$$

$$a = \pm 6 \text{ סגור}$$

$$a = \pm 2$$

$$\frac{(x-2b)(x-2b)}{(x-a)(x+a)} \quad \textcircled{C}$$

$$(x-a)(x+a)$$

"ז'י" ק"ח

$$x = 2b$$

$$x = 2b$$

$$x = -a$$

$$x = -a$$

$$(a = 2b) \quad \parallel c$$

$$-a = 2b$$

$$a^2 = 4b^2$$

$$a^2 = 4b^2$$

$$b = -3$$

$$b = -3$$

$$b = 1$$

$$b = 1$$

$$a = -6$$

$$a = -6$$

$$a = 2$$

$$a = -2$$

$$\frac{(x+6)^2}{x^2 - 36}$$

$$\frac{(x+6)^2}{x^2 - 36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$$

$$\checkmark$$

$$\checkmark$$

$$\checkmark$$

$$\checkmark$$

②

$$y(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

0.47

$$y(3) = \frac{2}{15}$$

0.133

$$\pi \int_1^3 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx = \frac{-1}{2(x^2+2x)} \Big|_1^3 \cdot \pi$$

$$\pi \left[\left(-\frac{1}{30} \right) - \left(-\frac{1}{6} \right) \right]$$

$$\frac{2}{15} \pi$$

$$x^2+2x = t$$

$$2x+2 dx = dt$$

$$x+1 dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} = \int \frac{1}{2} \cdot t^{-2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{2t}$$

$$⑤ \quad x^2 + y^2 + 2x = \frac{13}{5}$$

$$(x+1)^2 + y^2 = \frac{18}{5}$$

$$(-1, 0) \quad R = \sqrt{\frac{18}{5}}$$

$x + 3y + 7 = 0$ $x + 3y - 5 = 0$
$3x - y + 9 = 0$ $3x - y - 3 = 0$

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3y + 0 = 0$$

$$\frac{|-1+0+0|}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{18}{5}}$$

$$D-1 = \pm 6$$

$$D-1 = 6$$

$$D = 7$$

$$D-1 = -6$$

$$D = -5 \quad \text{☺}$$

$$3x - y + w = 0$$

$$\frac{|-3+0+w|}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{18}{5}}$$

$$w-3 = \pm 6$$

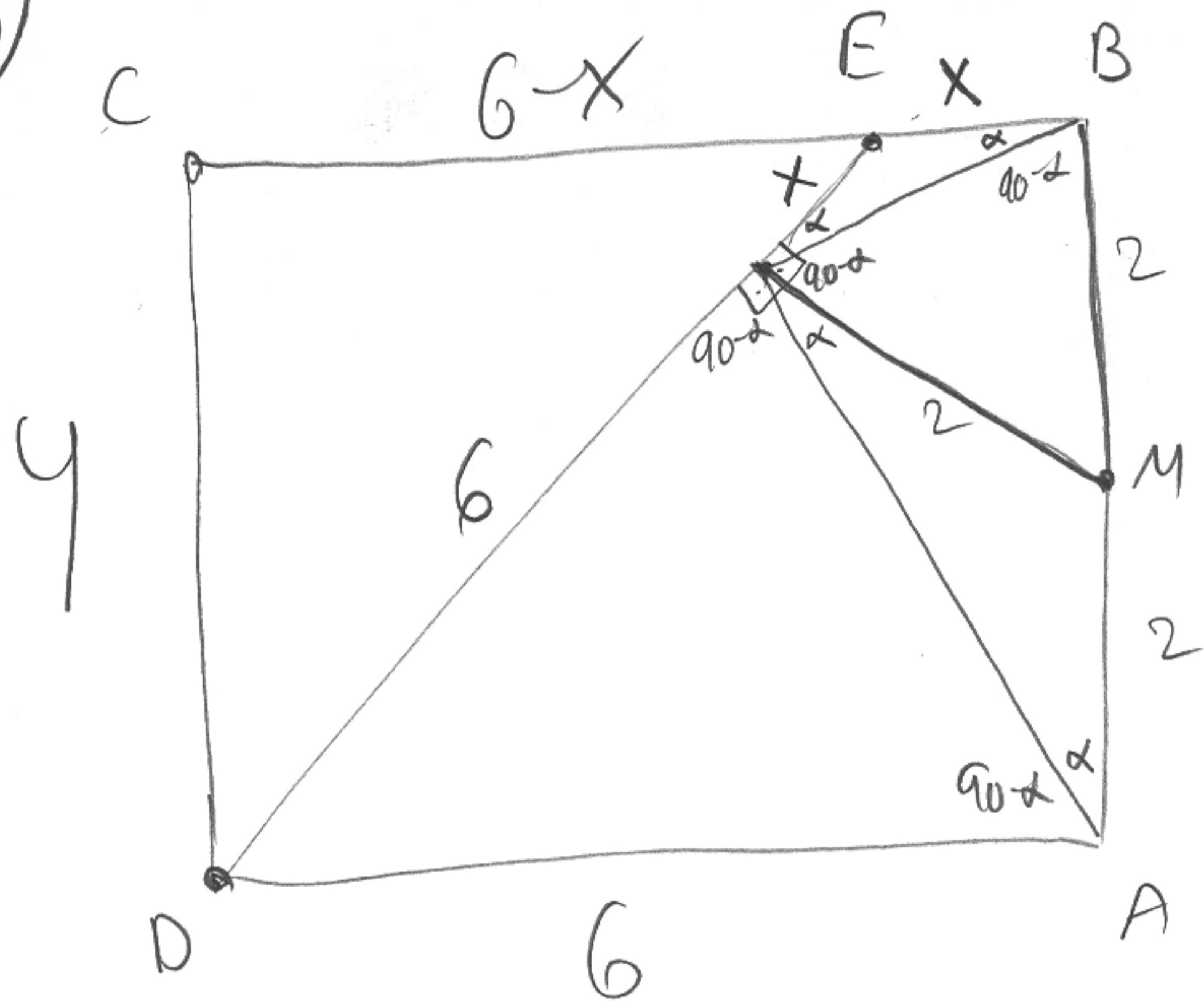
$$w-3 = 6$$

$$w = 9$$

$$w-3 = -6$$

$$w = -3$$

6



$$(6+x)^2 = (6-x)^2 + 4^2$$

$$\cancel{36 + 12x + x^2} = \cancel{36 - 12x + x^2} + 16$$

$$24x = 16$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$EB = \frac{2}{3}$$
$$CE = \frac{16}{3}$$

7

$$P(x) = w(x)(x-2) + 1$$

$$P(x) = T(x) \left(\underset{\downarrow}{(x^3+1)^2} + \underset{C'=2x}{x^2} \right)$$

$$(x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

$$P(2) = 1 = 4a + 2b + c$$

$$P(-1) = 1 = a - b + c$$

$$P'(-1) = -2 = -2a + b$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

$$c = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$P(x) = Q(x) (x^3 - 3x - 2)$$

$$+ ax^2 + bx + c$$

$$C' = 2ax + b$$

$$x^3 - x - 2x - 2$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x + 1)$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x+1)$$

$$(x+1)(x^2 - x - 2)$$

$$(x+1)(x-2)(x+1)$$

$$(x+1)^2(x-2)$$

$$P(2) = 4a + 2b + c$$

$$P(-1) = a - b + c$$

$$P'(-1) = -2a + b$$

⑧

$$2 \operatorname{tg} x - \sin x \cos^2 x \geq 4 \cos^3 x - 8 \quad \cos x \neq 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$2 \operatorname{tg} x - \sin x \cos^2 x - 4 \cos^3 x + 8 \geq 0$$

$$2 \sin x - \sin x \cos^3 x - 4 \cos^4 x + 8 \cos x = 0$$

$$2(\sin x + 4 \cos x) - \cos^3 x (\sin x + 4 \cos x) = 0$$

$$(\sin x + 4 \cos x) (2 - \cos^3 x) = 0$$

* $\sin x = 4 \cos x$

$$\operatorname{tg} x = 4$$

$$x = 1,815 + \pi k$$

$$x = -1,815$$

$$x = 4,957$$

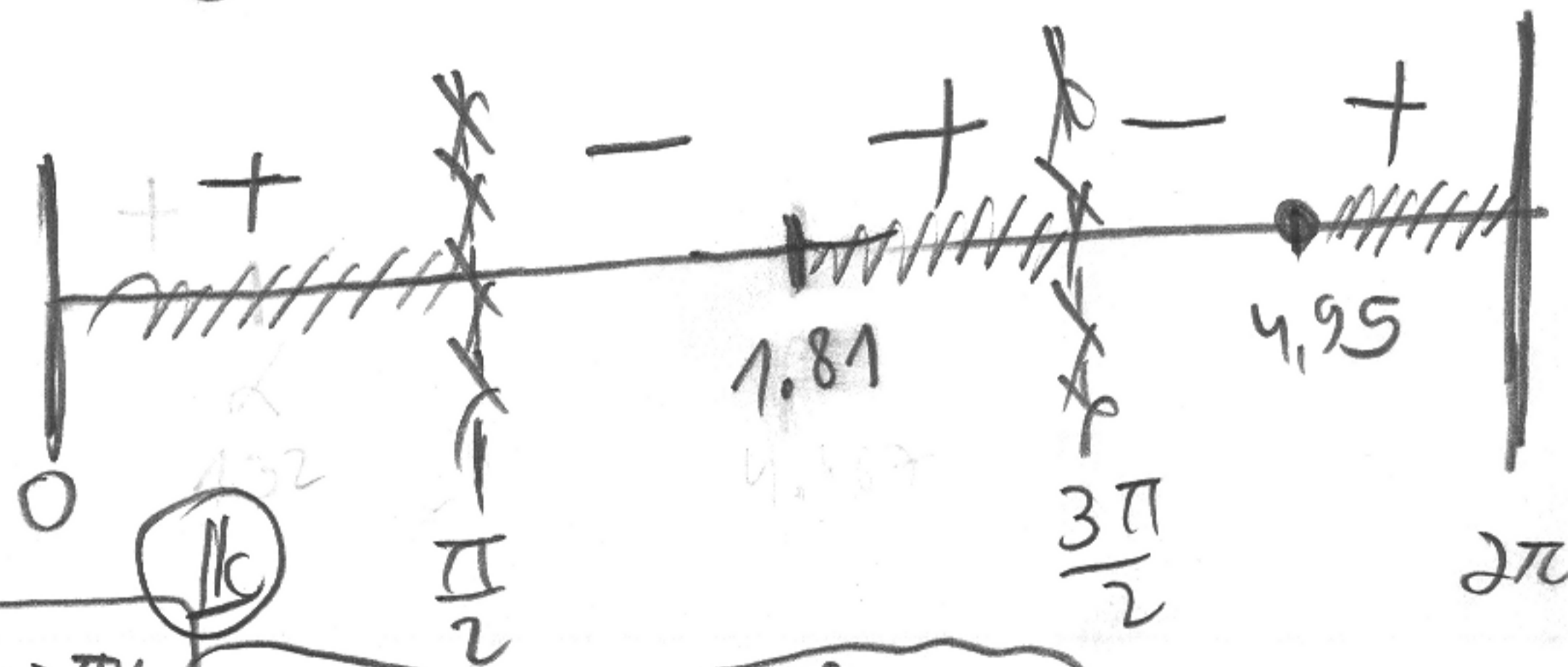
$$4,95 + 2\pi k \leq x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi k$$

$$1,81 + \pi k \leq x < \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$0 + 2\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$1,81 + \pi k \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4,95 + 2\pi k \leq x \leq 2\pi + 2\pi k$$



$\sin x + u \cos x \geq 0$
 מצא את x

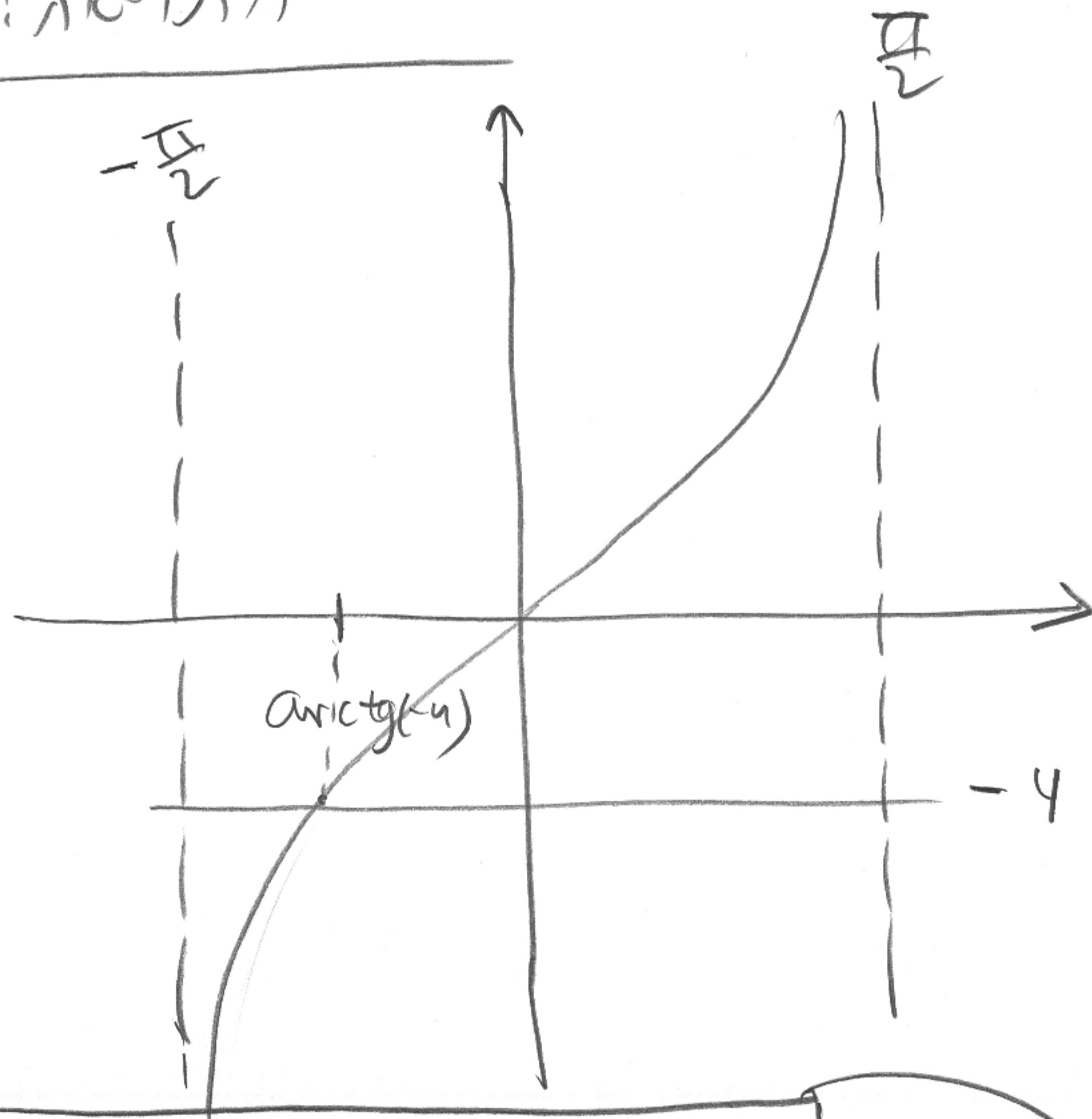
$$\frac{(\sin x + u \cos x)}{\cos x} \geq 0$$

$$\tan x + u \geq 0$$

$$\tan x \geq -u$$

$$\tan x = -u$$

$$x = \arctan(-u)$$



$$\pi k + \arctan(-u) \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$$

9

$$z^4 = i$$

$$z_2 z_1^{2015} + z_3 z_2^{2015} + z_4 z_3^{2015} + z_1 z_4^{2015} = 4i$$

$$z_1^{2015} = (z_1^4)^{504} \div z_1^3 = \frac{(i)^{504}}{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

$$\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_4}{z_3} + \frac{z_1}{z_4}$$

$$\cos 90 + \cos 90 + \cos 90 + \cos(-270)$$

$$i + i + i + i = 4i$$

$$z^4 = i$$

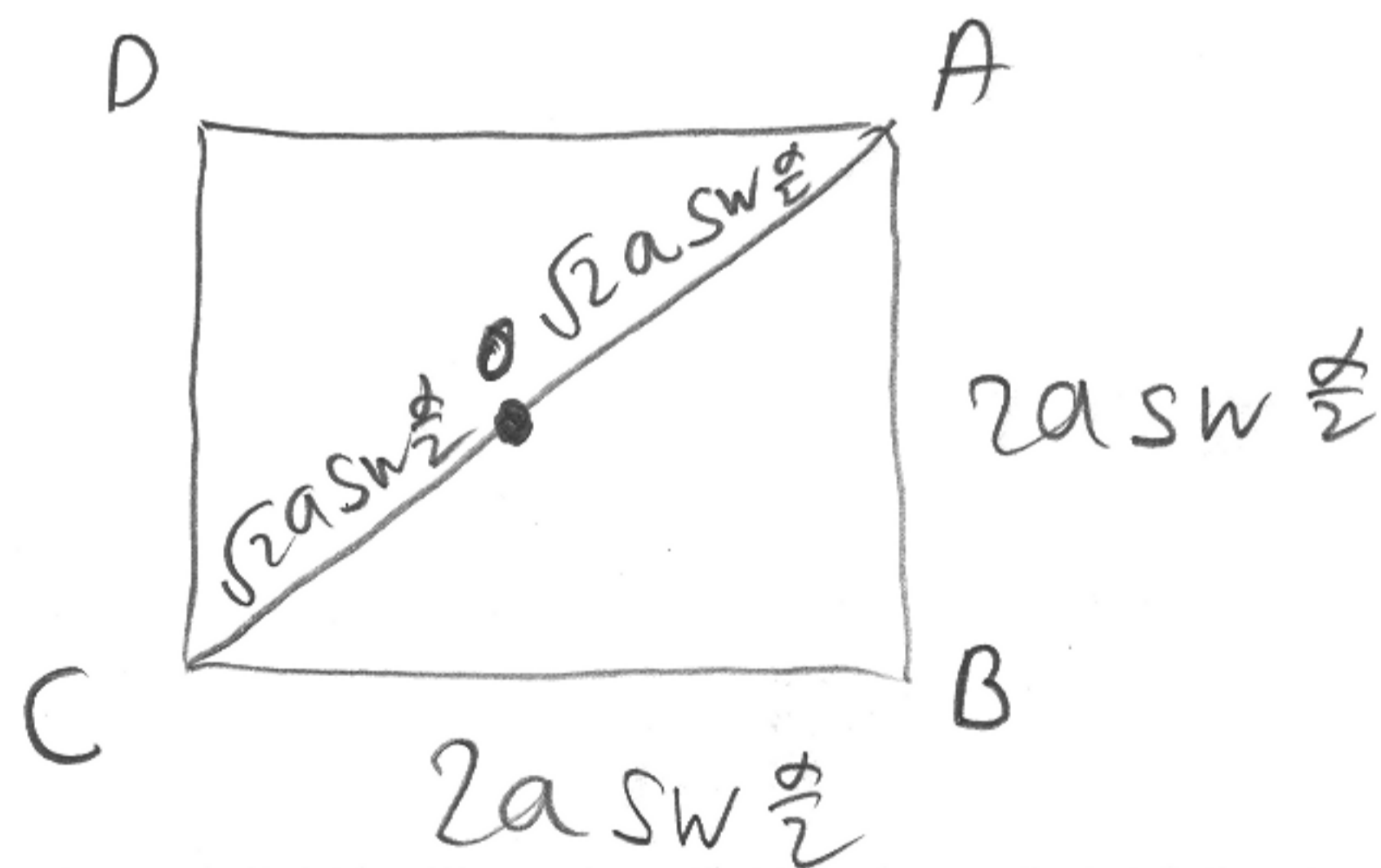
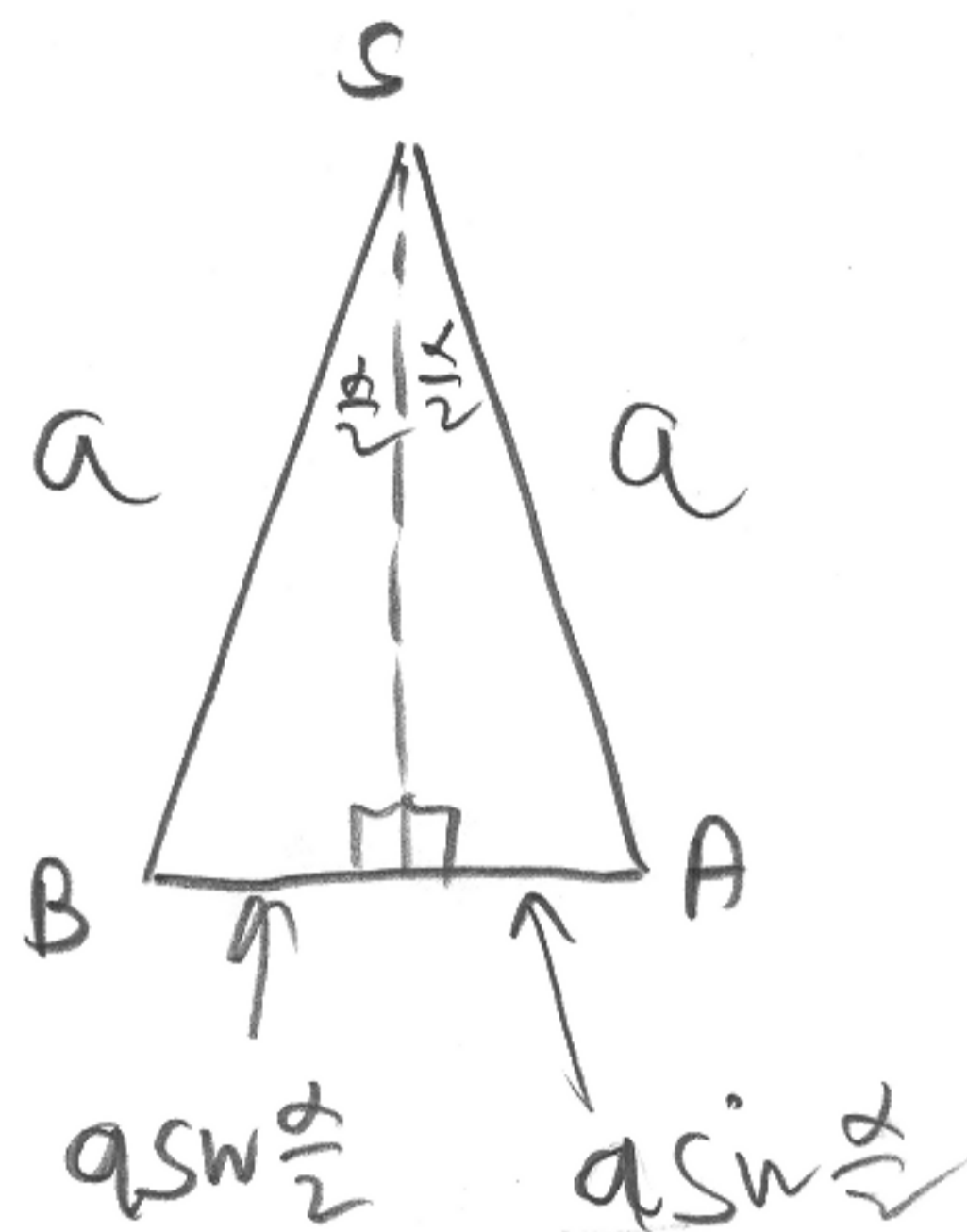
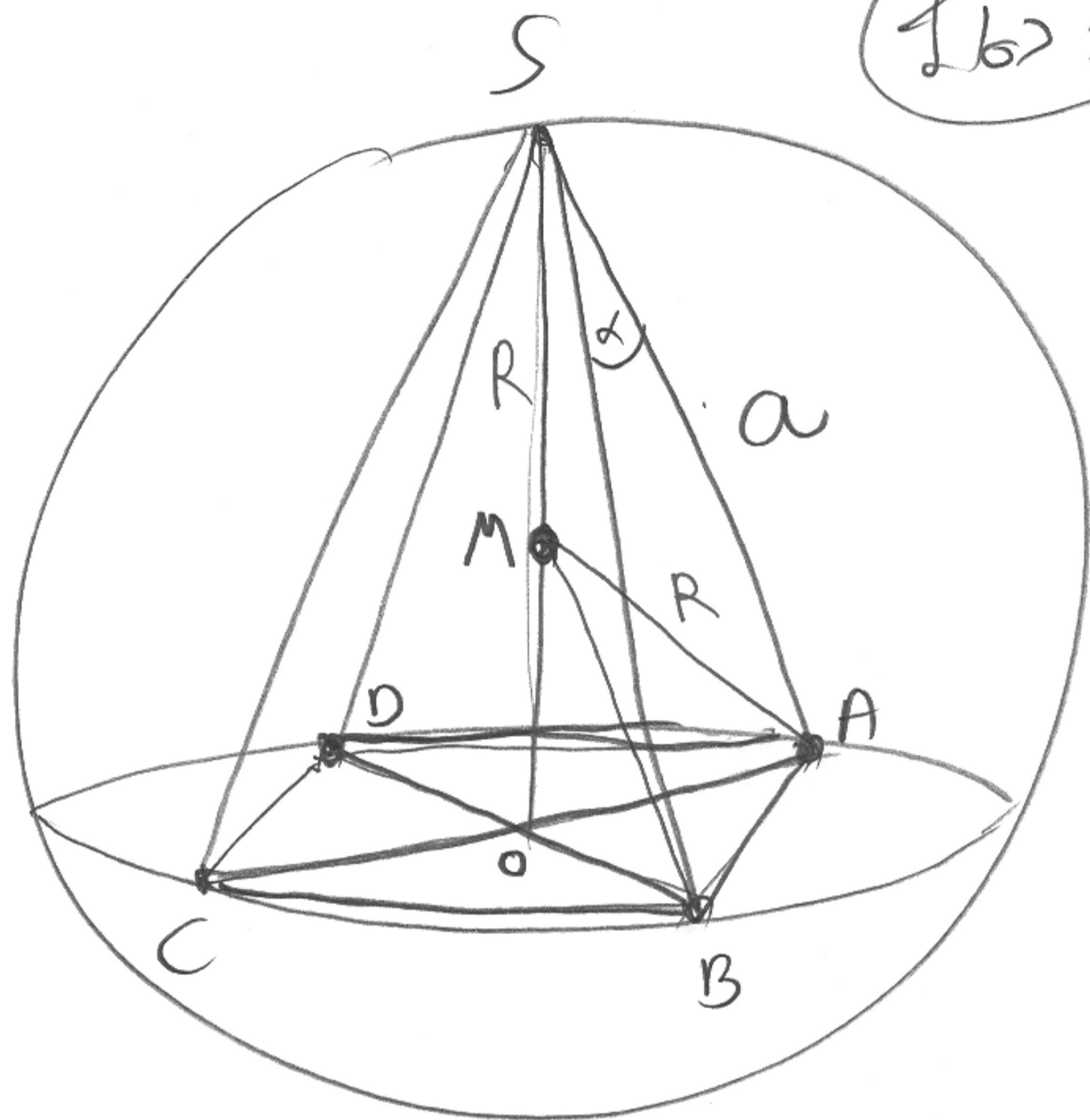
$$\uparrow \cos 90$$

$$\cos\left(\frac{90 + 360k}{4}\right)$$

$$\cos(22.5 + 90k)$$

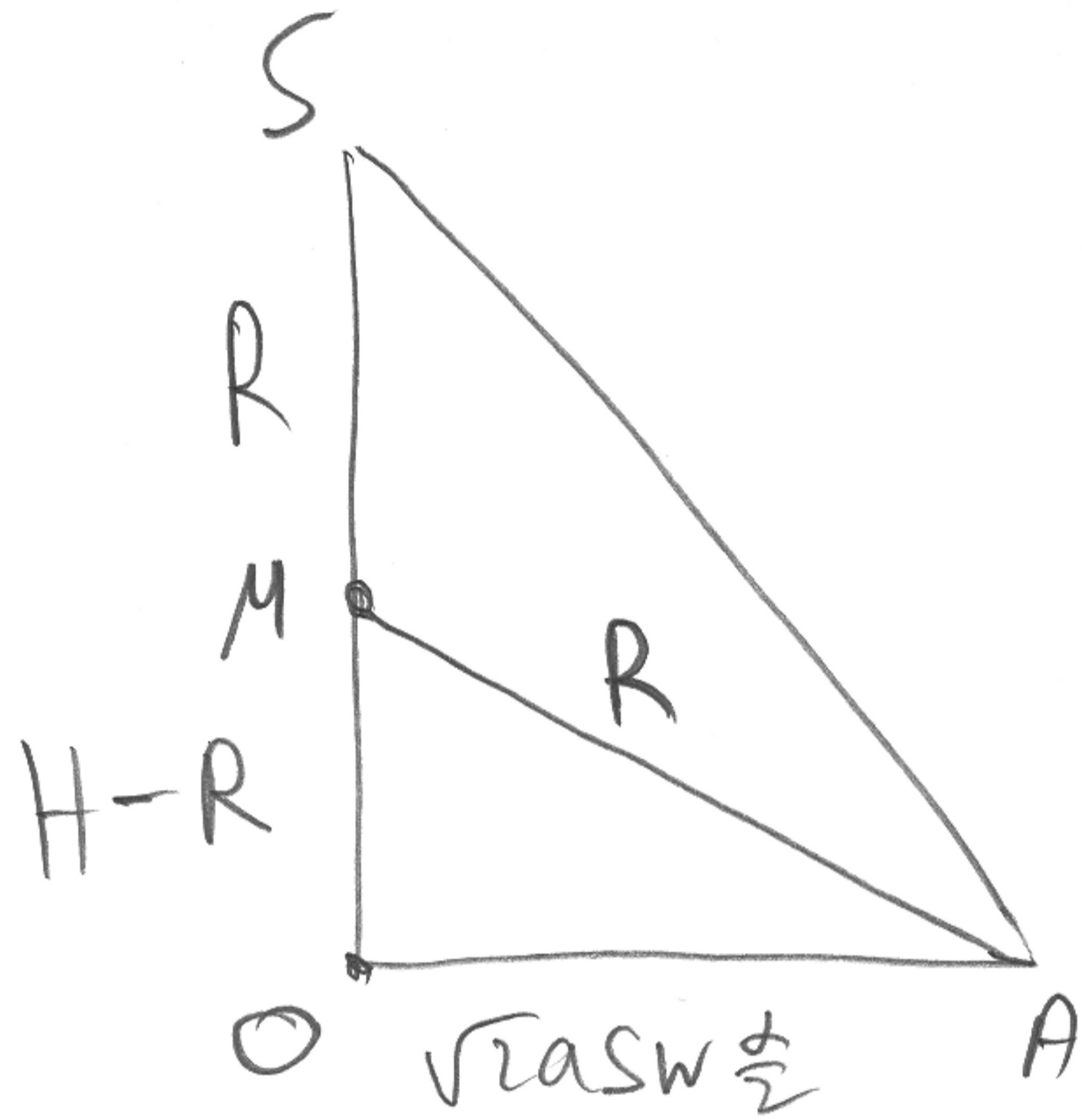
10

$\alpha = 60^\circ$
 $\{60^\circ, 70^\circ\}$



$$H^2 + 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = a^2$$

$$H^2 = a^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = a^2 \cos \alpha \Rightarrow H = a \sqrt{\cos \alpha}$$



$$(H-R)^2 + 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = R^2$$

$$H^2 + 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2HR$$

$$\frac{a^2 \cos \alpha + 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2a \sqrt{\cos \alpha}} = R$$

$$\frac{a (\cos \alpha + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2 \sqrt{\cos \alpha}} = R$$

$$R = \frac{a}{2} \left(\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \right) = \frac{a}{2 \sqrt{\cos \alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$