

בחינת גמר במתמטיקה

הנהיית לנבחן

- א. משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה. יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.
 ב. יש לפתור את כל השאלות.
 ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות וברשימת המשפטים המצורפים לשאלון הבחינה.
 ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
 ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
 ו. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (8%)

$$\sqrt{10-3^x} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-x} - 2 \quad \text{פתור:}$$

שאלה 2 (12%)

- א. (6%) על גרף הפונקציה $y = \frac{9}{x}$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר $x + 4y = 0$.
 ב. (6%) חשב את השטח של התחום החסום ע"י גרף הפונקציה $f(x) = |\sin x| \sqrt{1 + \cos x}$, $0 \leq x \leq 2\pi$ וציר ה-x.

שאלה 3 (10%)

- הוכח כי המעגל $x^2 + (y-6)^2 = 16$ וההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ משיקים זה לזה ומצא את משוואת המשיק המשותף בנקודת ההשקה הנמצאת ברביע הראשון.

שאלה 4 (12%)

- א. (6%) כמה מספרים הנמצאים בין 999 (לא כולל) לבין 10000 (לא כולל) ניתן לרשום על ידי הספרות 0,1,2,3,4,5,6,7 כאשר כל ספרה מופיעה לכל היותר פעם אחת?
 ב. (6%) כמה מספרים הנמצאים בין 9999 (לא כולל) לבין 100000 (לא כולל) ניתן לרשום על ידי הספרות 0,1,2,3,4,5,6,7 כאשר ספרה 0 מופיעה פעמיים וכל ספרה אחרת לכל היותר פעם אחת?

שאלה 5 (18%)

- קודקודי הבסיס של הפירמידה המשולשת SABC הם $A(0, -1, -8)$, $B(-1, 8, 0)$, $C(2, 1, -4)$.
 מקצוע SA מאונך למישור הבסיס ו- $\vec{SA} \cdot \hat{i} = 6$ (i - ווקטור יחידה של ציר ה-x).
 א. (6%) מצא את משוואת המישור בו מונח בסיס הפירמידה.
 ב. (6%) מצא את שיעורי הקדקוד S ונפח הפירמידה.
 ג. (6%) מצא את משוואת הישר עליו מונח גובה המשולש ABC המורד מהקדקוד A.

שאלה 6 (10%)

$$\text{מצא את כל הפתרונות של האי-שוויון } \frac{4 \sin 2x}{2 \cos^2 x - 1} \leq |\operatorname{tg} x| \text{ בקטע } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

שאלה 7 (16%)

משולש שווה צלעות ABC הוא בסיס של הפירמידה הישרה SABC. אורך צלע הבסיס שווה a. M אמצע של BS, N אמצע של CS, P אמצע של AB, Q אמצע של AC.

- א. (4%) הוכח שהנקודות M, N, P, Q נמצאות במישור אחד.
ב. (12%) נתון: $2PQ = PM$. חשב את נפח הפירמידה.

שאלה 8 (14%)

א. (6%) פתור את המשוואה $\frac{(z-i)^3 i}{\sqrt{3} + i} - i = 1$

ב. (8%) סכום ארבעת המקדמים האחרונים של הפולינום $(z - \text{מספר מרוכב})$ $(iz + 1)^n = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, z \in \mathbb{C}$ שווה $-54 - 154i$.

- מצא את סכום כל המקדמים של הפולינום.
- מצא את סכום כל המקדמים של הפולינום הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

בהצלחה!

① $\sqrt{10-3^x} \geq 3^{-\frac{1}{2}(-x)} - 2$

$\sqrt{10-3^x} \geq 3^{\frac{1}{2}x} - 2$

$3^{\frac{1}{2}x} = t$
(no)

$\sqrt{10-t^2} \geq t-2$

$t-2 < 0$

$t < 2$

$t \leq 3$

$t-2 \geq 0$ $t \geq 2$

$10-t^2 \geq t^2-4t+4$

$2t^2-4t-6 \leq 0$

$t^2-2t-3 \leq 0$

$(t-3)(t+1) \leq 0$



$-1 \leq t \leq 3$

$2 \leq t \leq 3$

$10-3^x \geq 0$

$10 \geq 3^x$

$3^{\log_3 10} \geq 3^x$

$\log_3 10 \geq x$
2.3...

$10-t^2 \geq 0$
 $-\sqrt{10} \leq t \leq \sqrt{10}$

$t \leq 3$

$3^{\frac{1}{2}x} \leq 3^1$

$\frac{1}{2}x \leq 1$

$x \leq 2$

~~$x \leq 2$~~

② (k)



$$y' = \frac{-10}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 = 36 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6, \frac{3}{2} \\ -6, -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$x + 4y = 0$$

$$4y = -x$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$

$$\frac{\text{max } y}{(t, \frac{9}{t})}$$

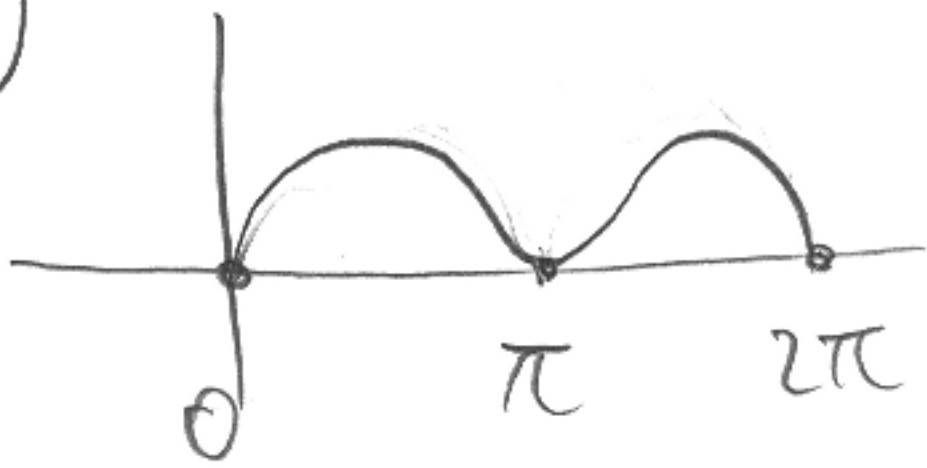
$$x + 4y = 0$$

$$\frac{|t + \frac{36}{t}|}{\sqrt{17}} = d$$

$$d' = \pm \left(1 - \frac{36}{t^2}\right) = 0$$

$$t = \pm 6$$

⑦



$$\int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx =$$

$$-\frac{(1 + \cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \cos x)^3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \sqrt{(1 - 1)^3} - \left(-\frac{2}{3} \sqrt{8}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

3

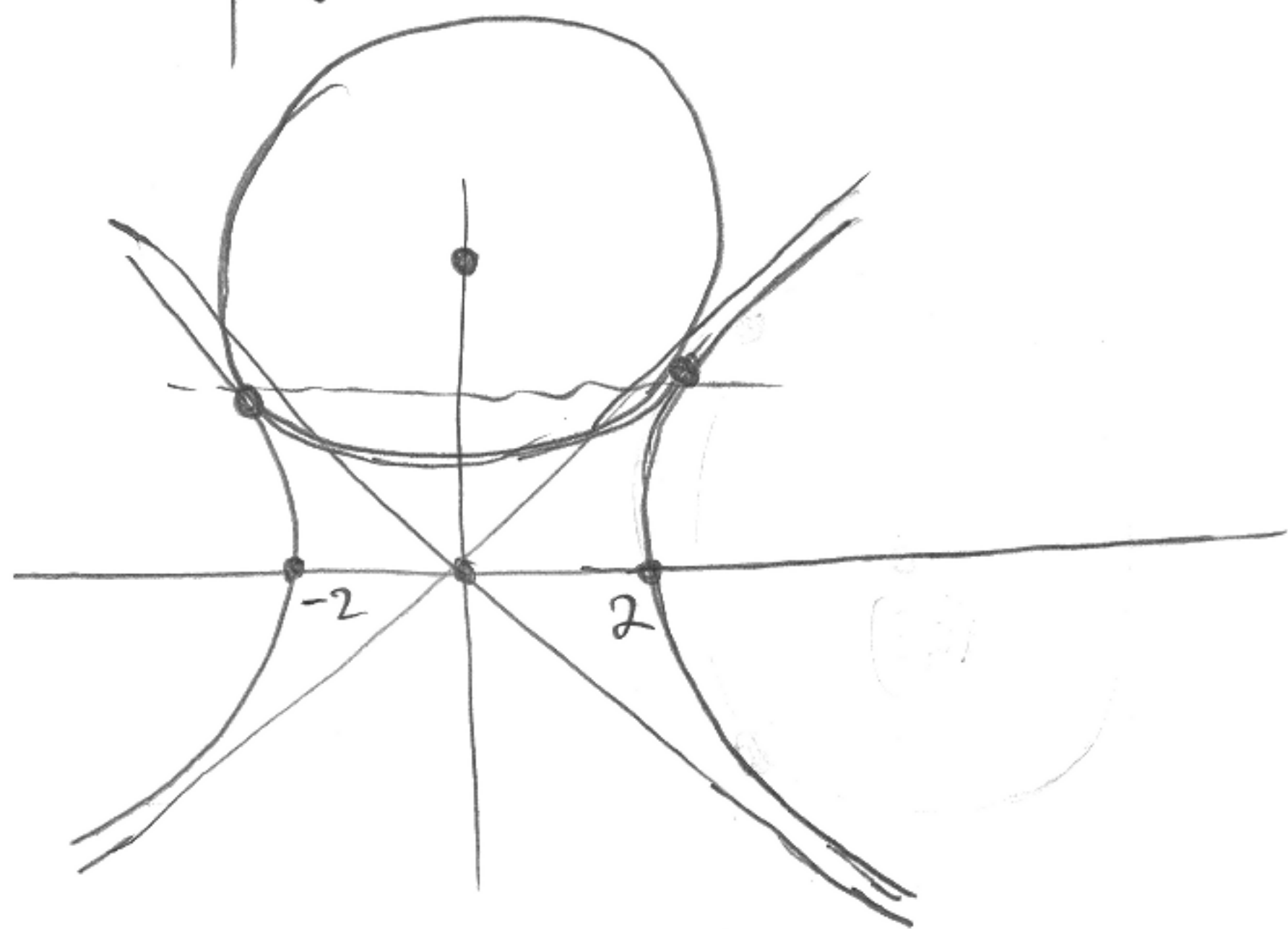
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c^2 = 12$$

$$a^2 = 4 \quad b^2 = 8$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{8}}{2}x$$

$$y = \pm \sqrt{2}x$$



$$x^2 + (y-6)^2 = 16$$

$$(0, 6) \quad R=4$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = 16 \\ x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(y-6)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 12$$

$$y^2 - 12y + 36 + \frac{1}{2}y^2 - 12 = 0$$

$$1.5y^2 - 12y + 24 = 0$$

$$y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$(y-4)^2 = 0$$

$$y = 4$$

$$x^2 + 4 = 16$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

| |
|-------------------|
| $(2\sqrt{3}, 4)$ |
| $(-2\sqrt{3}, 4)$ |

$$2\sqrt{3}x + (y-6)(y-6) = 16$$

$$\sqrt{3}x - y + 6 = 8$$

$$\sqrt{3}x - 2 = 2$$

System of Equations

4

$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \Rightarrow \underline{\underline{8}}$

6

$$V_8^4 - V_7^3 = \boxed{1470}$$

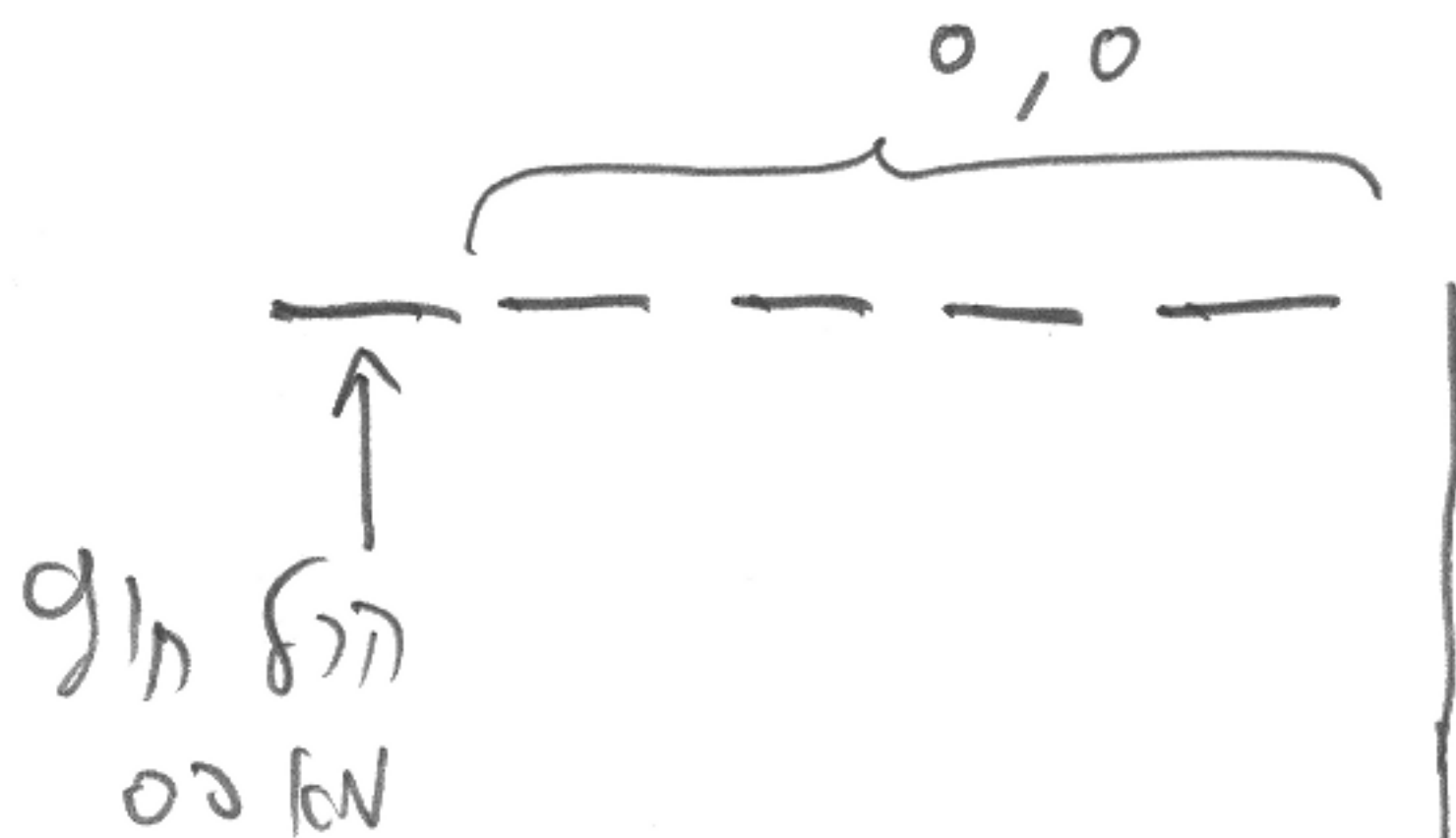
הכלת
מס

7. 7. 6. 5

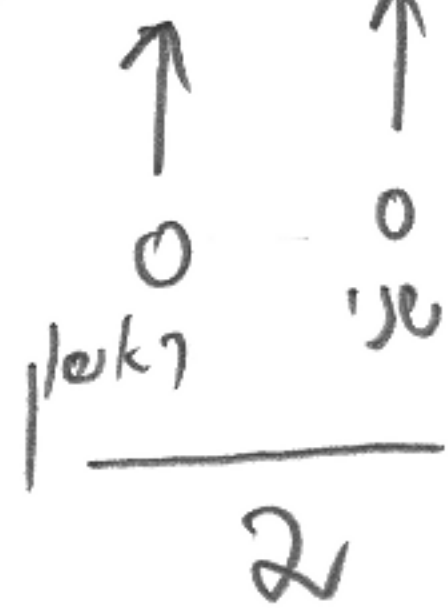
$$\boxed{1470}$$

כל מספר
אחר
על היותו

7



$$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 =$$



מקום
מספר
סדרה

$$\boxed{1260}$$

אם מביאה מספרים.

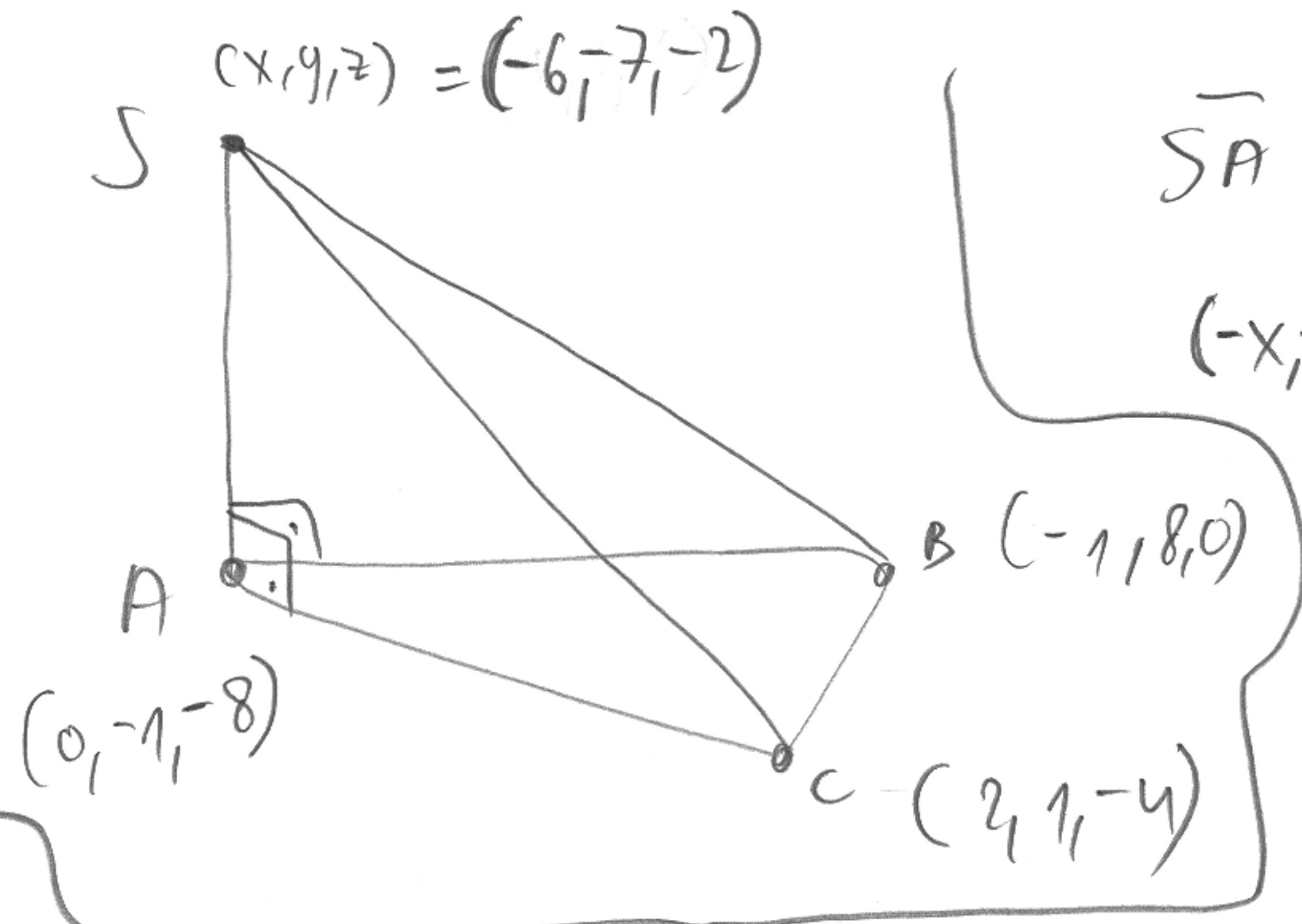
כל סדרה אחרת
על היותו מספר אחרת



צורך אחיד

$$\frac{C_7^3 \cdot 5! - C_7^3 \cdot 4!}{2!} = \boxed{1260}$$

(5)



$$\vec{SA} \cdot (1, 0, 0) = 6 \quad \vec{SA} = [-x, -1-y, -8-z]$$

$$(-x, -1-y, -8-z) \cdot (1, 0, 0) = 6 \quad \downarrow$$

$$-x = 6$$

$$x = -6 \Rightarrow \vec{SA} = [6, -1-y, -8-z]$$

$$\vec{SA} = t \vec{n} = [t, t, -t]$$

$$6 = t \quad -1-y = 6 \quad -8-z = -6$$

$$-7 = y \quad -2 = z$$

$$S(-6, -7, -2)$$

(K)

$$\vec{AB} = [-1, 9, 8]$$

$$\vec{AC} = [2, 2, 4]$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = [20, 20, -20]$$

$$[1, 1, -1]$$

$$\frac{(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS}}{6} =$$

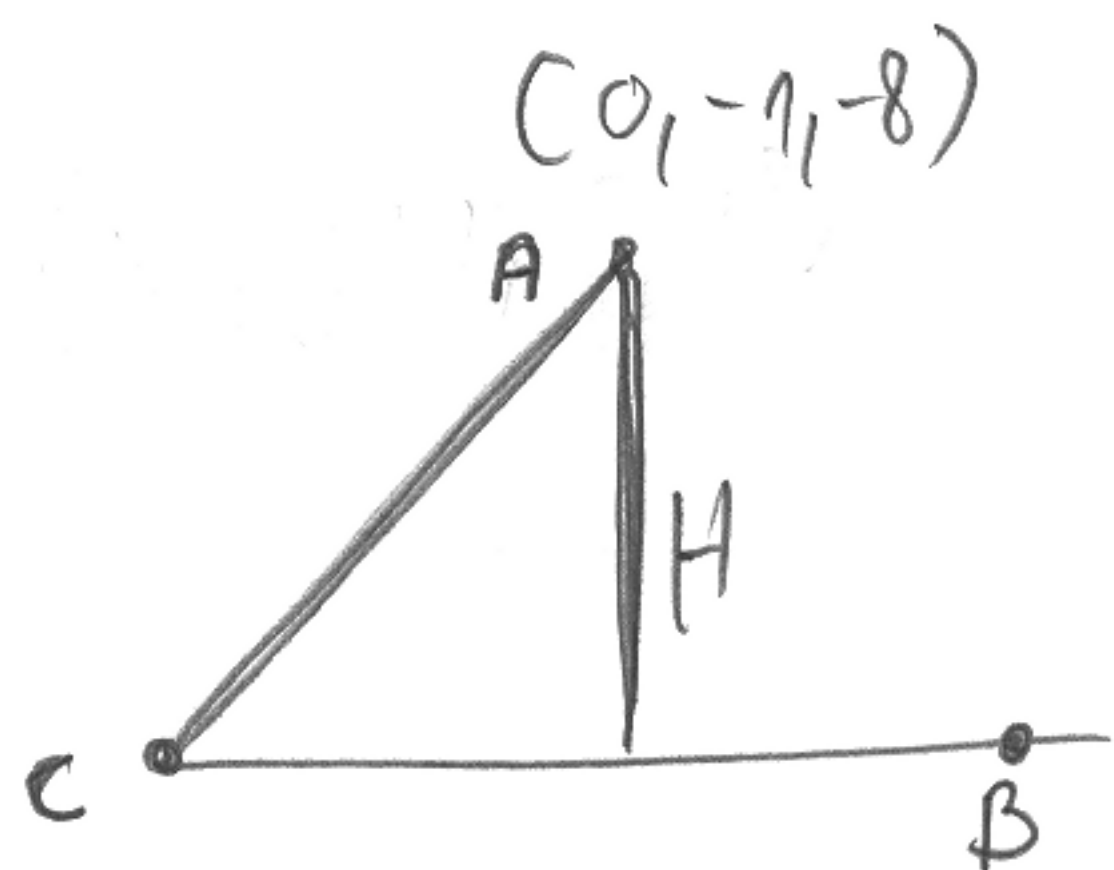
$$\frac{(20, 20, -20) \cdot (-6, -6, 6)}{6} = 60$$

$$x + y - z + D = 0$$

$$0 - 1 + 8 + D = 0 \quad D = -7 \Rightarrow$$

$$x + y - z - 7 = 0$$

②



$$\vec{n} \times \vec{CB} = (11, -1, 10)$$

$$H: (0, -1, -8) + \gamma (11, -1, 10)$$

6

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow$$

на границах
исл. $\tan x \Rightarrow |\tan x| = -\tan x$

$$\frac{4 \sin 2x}{2 \cos^2 x - 1} \leq |\tan x|$$

$\cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
 $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$
 $x \neq \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{4 \sin 2x}{\cos 2x} \leq -\tan x \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \tan 2x + \tan x \leq 0 \end{array} \right.$$

$$4 \tan 2x \leq -\tan x$$

$$\frac{8 \tan x}{1 - \tan^2 x} = -\tan x$$

$\tan x = 0$

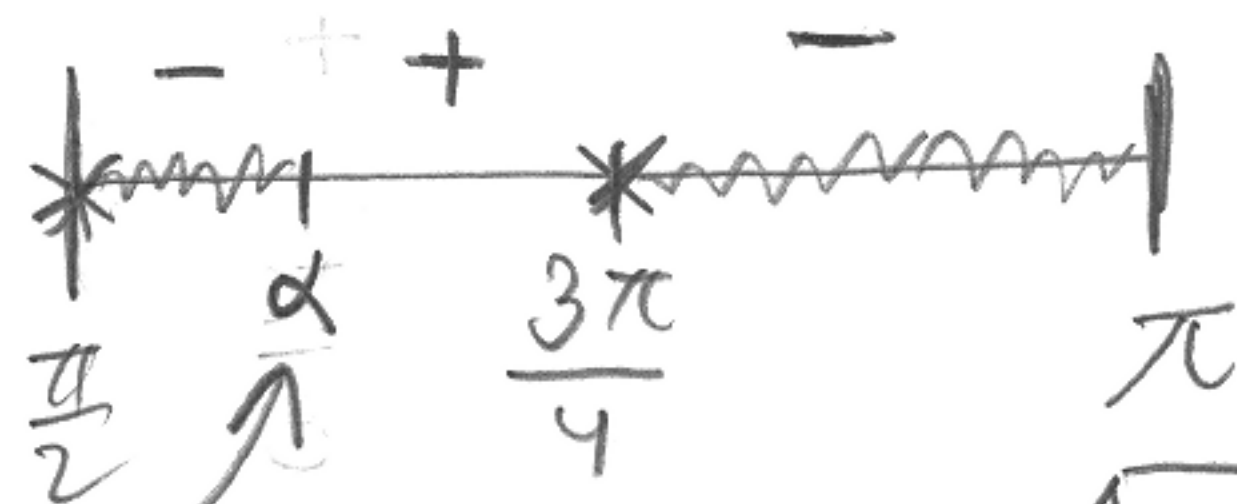
$$8 = 1 + \tan^2 x$$

$$9 = \tan^2 x$$

$$3 = \tan x$$

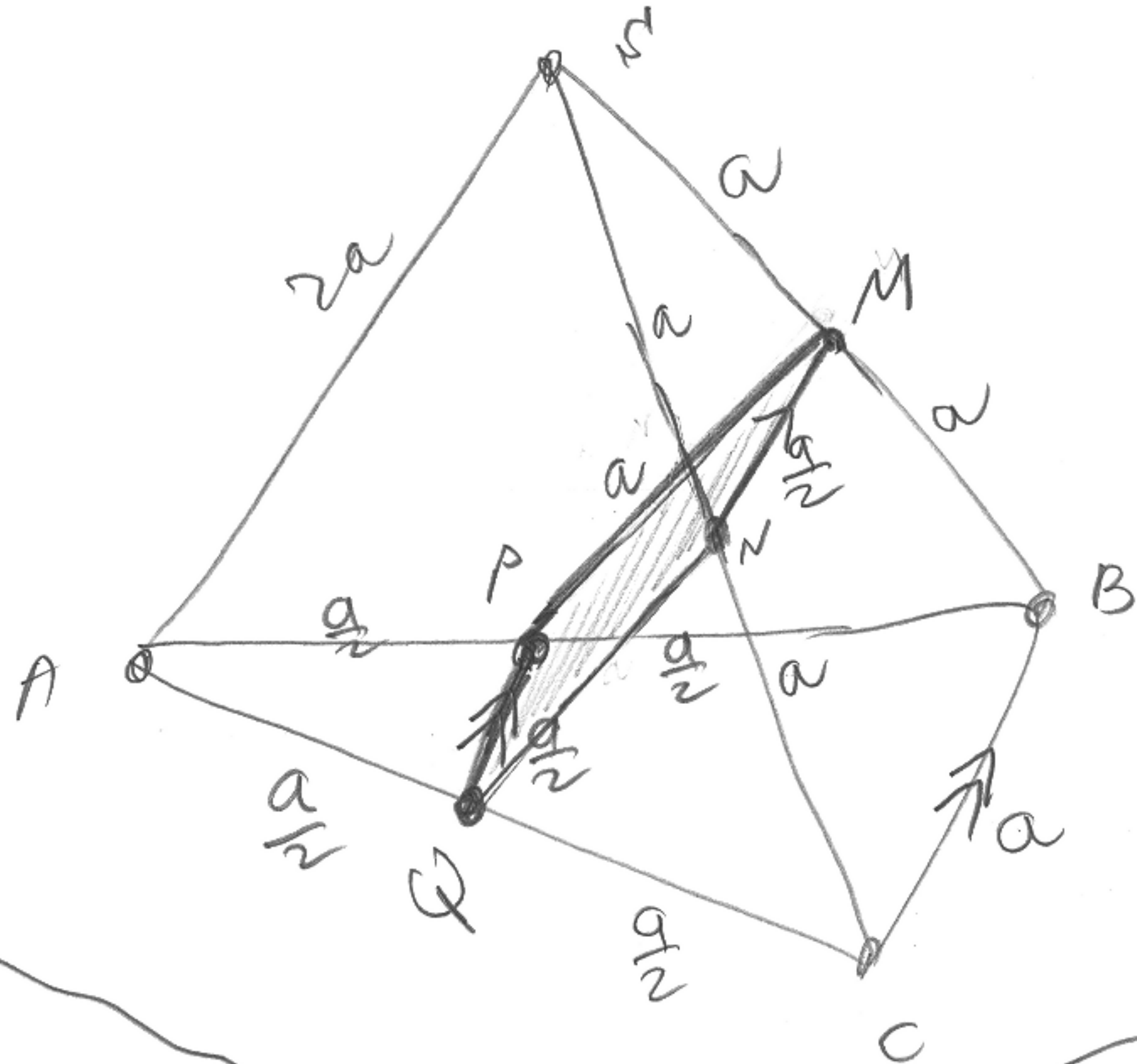
$$-3 = \tan x \Rightarrow x =$$

$$\begin{array}{l} -\arctan 3 + \pi = \alpha \\ \arctan(-3) + \pi = \alpha \end{array}$$



$\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$
 $\frac{\pi}{2} < x \leq \alpha$

(7)



$MN \parallel BC$

(8)

$PQ \parallel BC$

\Downarrow

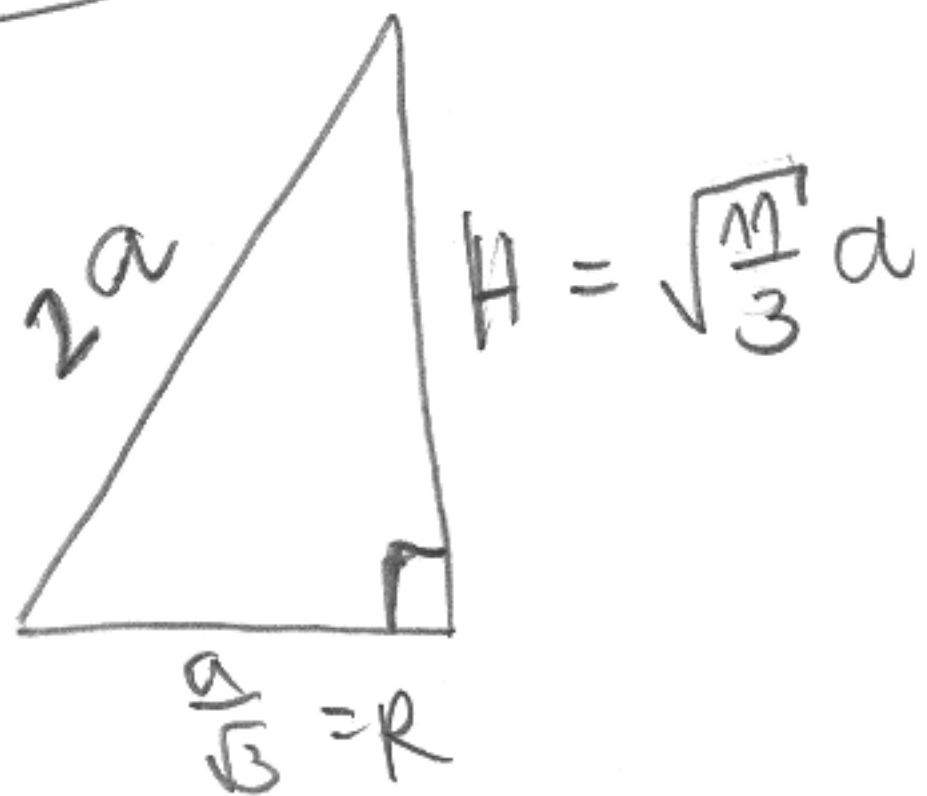
$\sim MN \parallel PQ$

\Downarrow

N, M, P, Q lie in
 $3/4$ of

$$\frac{a}{\sin 60} = 2R$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = R$$



$V =$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a \cdot \sin 60}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} a$$

$$\frac{\sqrt{11} a^3}{12}$$

8. 7. 18

$$\frac{(z-i)^3 i}{\sqrt{3} + i} - i = 1$$

$$(z-i)^3 = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{i} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ \cdot 2 \operatorname{cis} 30^\circ}{2 \operatorname{cis} 90^\circ}$$

$$(z-i)^3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} (-15^\circ)$$

$$z-i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{-15 + 360k}{3} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} (-5 + 120k)$$

$$z = \sqrt{2} \operatorname{cis} (-5 + 120k) + i$$

$$k = 0, 1, 2$$

8

2

$$(iz+1)^n = \dots + C_n^{n-3} (iz)^3 + C_n^{n-2} (iz)^2 + C_n^{n-1} (iz)^1 + 1$$

1

$$C_n^{n-3} (-i) + C_n^{n-2} (-1) + C_n^{n-1} i + 1 = -54 - 154i$$

$$- \frac{n(n-1)}{2} + 1 = -54$$

$$-n^2 + n + 2 = -108$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n-11)(n+10) = 0$$

$$n = 11 \quad n = -10$$

$\rho > 0$
 $\varphi \in (0, 2\pi)$
 $z = 1$

$$(i+1)^{11}$$

$$(\sqrt{2} cis 45^\circ)^{11} =$$

$$\sqrt{2}^{11} cis(495)$$

$$32\sqrt{2} cis 135$$

$$((1+i)^2)^5 (1+i)$$

$$(2i)^5 (1+i) =$$

$$32i^5 (1+i)$$

$$32i (1+i)$$

$$-32 + 32i$$

2) הא כרוב כמקומה היא 15 זימן מכלים i ופסל
 טהא מרפ סטק סב המקומה
 על התפק המקומה

$$-32 + 32i$$

$$32i$$

$$32i$$