

מבחן גמר במתמטיקה - מועד א'

משך המבחן 3 שעות. אין לצאת מהכיתה ב- 45 הדקות האחרונות של המבחן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה!

פתרו אחת מהשאלות 1 או 2

שאלה מס' 1 (15%)

מצאו את הפתרון של אי השוויון: $\text{tg}(3x) - \text{tg}(x) \geq \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

שאלה מס' 2 (15%)

פתרו: $\log_{4x} \left(\frac{16}{x} \right) - 3 \cdot (\log_2 x)^2 \leq 2$

שאלה מס' 3 (15%) - שאלת חובה!

במשולש ABC, שבו $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, חסום מעגל שמרכזו O. K היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע AB, L היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע BC, M היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע AC. נתון: $KM = a$, $ML = c$, $KL = b$.

א. (8%) הוכיחו: שטח המרובע AKOM שווה ל- $\frac{a^2}{2 \cdot \sin \alpha}$.

ב. (7%) הביעו את שטח המשולש ABC באמצעות $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

שאלה מס' 4 (20%) - שאלת חובה!

נתונים שני ישרים: $(\ell_1) \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$, $(\ell_2) \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$

א. (8%) הוכיחו שהישרים נמצאים במישור אחד ורשמו את המשוואה האלגברית של מישור זה.

ב. (6%) רשמו את משוואת הישר החוצה את הזווית בין הישרים הנתונים. (מספיק לרשום משוואת חוצה זווית אחד)

ג. (6%) תהא M נקודת החיתוך של הישרים הנתונים. נתונה הנקודה $A(3, -6, 1)$.

חשבו את קוסינוס הזווית בין הישר AM לבין חוצה הזווית שמצאתם בסעיף ב'.

פתרו אחת מהשאלות 5 או 6

שאלה מס' 5 (15%)

- א. (8%) במשולש ישר זווית, סכום אורכי ניצב אחד והיתר שווה ל- m . הביעו באמצעות m את הנפח הגדול ביותר הנוצר כאשר המשולש מסתובב סביב הניצב השני.
- ב. (7%) חשבו את שטח התחום המוגבל בין הקווים: $y = e^{-x}$, $y = e^x$, $y = 2$.

שאלה מס' 6 (15%)

- א. (8%) פתרו את המשוואה $z^5 + 2z = i\sqrt{12} \cdot z$. רשמו את הפתרונות בצורה טריגונומטרית.
- ב. (7%) ציירו במישור המרוכב את התחום:
$$\begin{cases} |z|^2 + 2 \cdot \text{Im}(z) \leq 15 \\ |z - 2| \leq |z| \end{cases}$$

שאלה מס' 7 (15%) - שאלת חובה!

- בפירמידה משולשת $SABC$, הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$). נסמן: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$). כל המקצועות יוצרים עם מישור הבסיס את אותה זווית, β .
- א. (8%) נתון: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- R . הביעו את נפח הפירמידה באמצעות α , β , R .
- ב. (7%) הביעו את טנגנס הזווית שיוצר מישור העובר דרך הצלע AC ואמצע הגובה, עם מישור הבסיס, באמצעות α , β .

פתרו אחת מהשאלות 8 או 9

שאלה מס' 8 (20%)

נתונה פונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 19}{nx^2 - 6x + m}$

- א. (6%) מצאו את הפרמטרים m ו- n , אם נתון שקיים רק ערך אחד של x עבורו הפונקציה אינה מוגדרת, ושיש לה אסימפטוטה אופקית $y = 2$.
- ב. (14%) ציירו את גרף הפונקציה כאשר $n = 1$, $m = 9$ ומצאו אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון.

שאלה מס' 9 (20%)

נתונות הפונקציות: $f(x) = ax^2 - 16x + b$, $g(x) = -\frac{6a}{x}$

- ידוע שהגרפים של שתי הפונקציות משיקים בנקודה שבה $x = 3$.
- א. (10%) מצאו את הפרמטרים a ו- b .
- ב. (10%) מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $f(x) = g(x)$.



בהצלחה!

1

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x \geq \sin 2x}}$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} - \sin 2x \geq 0$$

$$\sin 2x \left(\frac{1}{\cos x \cos 3x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\sin 2x \left(\frac{1 - \cos x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} \right) \geq 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

0, 90, 180,
270, 360

$$1 - \cos x \cos 3x = 0$$

$$1 = \cos x \cos 3x$$

$$1 = \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 4x]$$

$$2 = \cos 2x + \cos 4x$$

$$2 = 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \sin 2x = 0$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

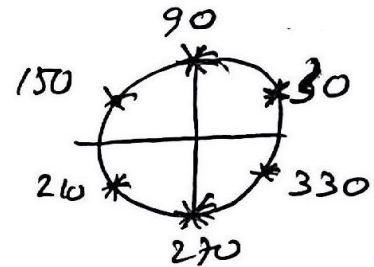
$$\cos 3x \neq 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$



$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

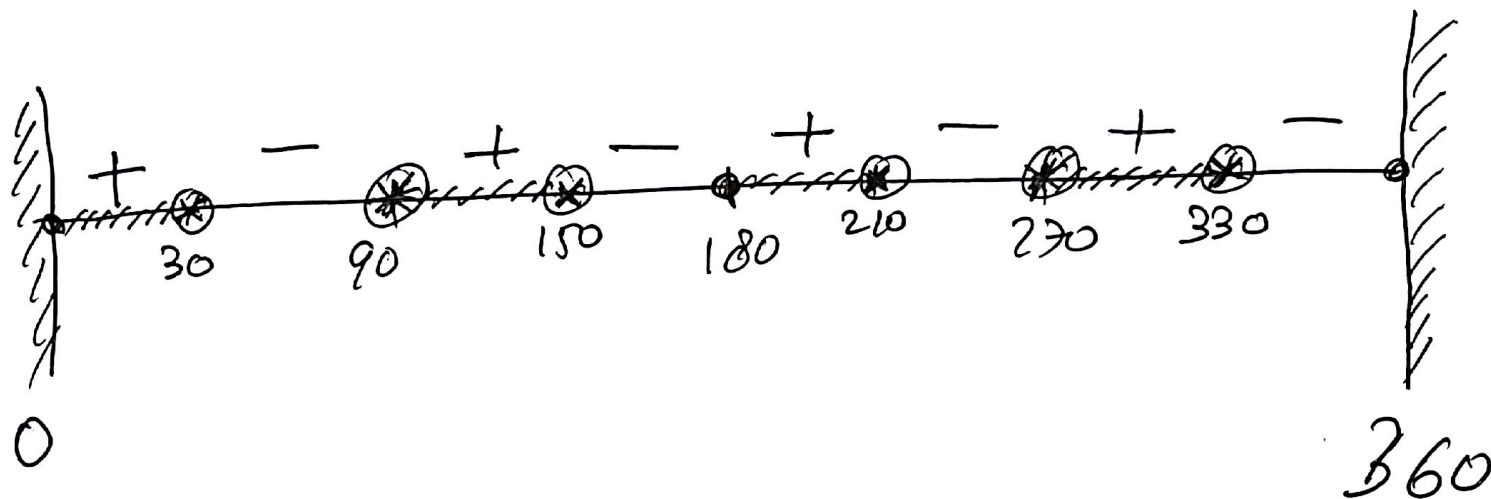
$$X = \pi k$$

$$\underline{0}, \underline{180}, \underline{360}$$

$$2X = \pi k$$

$$X = \frac{\pi k}{2}$$

$$\underline{0}, \underline{90}, \underline{180}, \underline{270}, \underline{360}$$



$$0 \leq X < 30, 90 < X < 150, 180 \leq X < 210, 270 < X < 330, X = 360$$

$$\log_{4x} \frac{16}{x} - 3 \cdot (\log_2 x)^2 \leq 2$$

$$x \neq 0 \quad \frac{16}{x} > 0 \quad x > 0 \quad (2)$$

$$4x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{1}{4}$$

$$4x > 0$$

$$x > 0$$

$$\frac{\log_2 16 - \log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} - 3(\log_2 x)^2 \leq 2$$

$$\boxed{\log_2 x = t : t > -2}$$

$$\frac{4-t}{2+t} - 3t^2 - 2 \leq 0$$

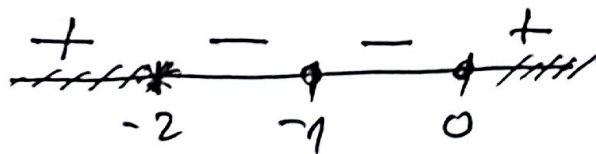
$$\frac{4-t-6t^2-3t^3-4-2t}{2+t} \leq 0$$

$$\frac{-3t^3-6t^2-3t}{2+t} \leq 0$$

$$\frac{-3t(t^2+2t+1)}{2+t} \leq 0 \quad /: -3$$

$$\frac{t(t+1)^2}{2+t} \geq 0$$

$$t=0 \quad t=-1 \quad t \neq -2$$



$$t < -2$$

$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4}$$

$$\boxed{0 < x < \frac{1}{4}}$$

$$t = -1$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{1}{2}$$

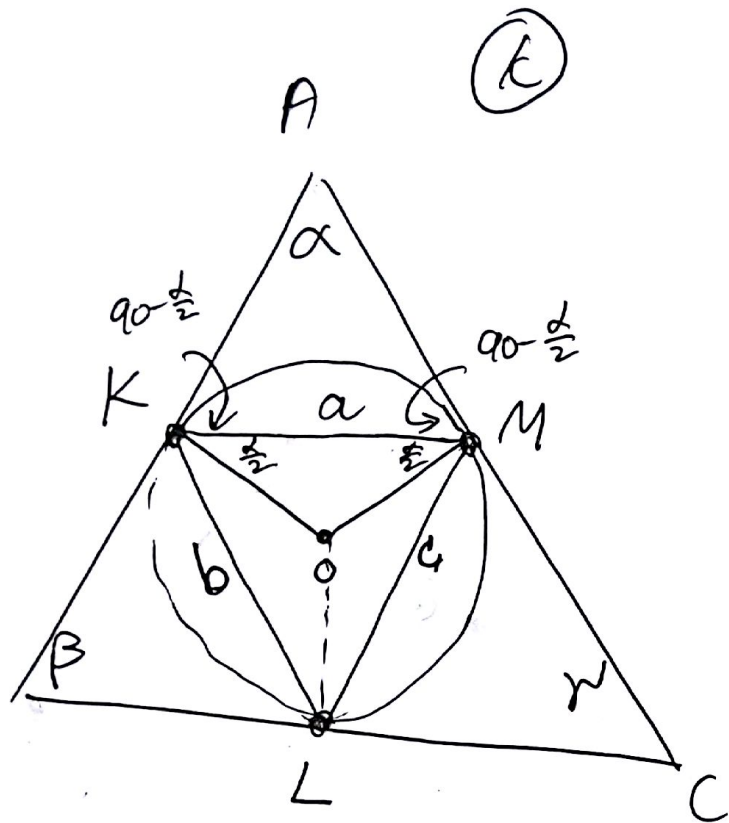
$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$t \geq 0$$

$$\log_2 x \geq \log_2 1$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

(3)



$$S_{AKOM} = \frac{a^2 \cdot \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(90 - \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \alpha} + \frac{a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin(180 - \alpha)}$$

$$\frac{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} + \frac{a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{a^2 (\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \alpha} = \frac{a^2}{2 \sin \alpha}$$

∴ similarly

$$S_{BKOL} = \frac{b^2}{2 \sin \beta}$$

$$S_{CMOL} = \frac{c^2}{2 \sin \gamma}$$

(2) $S_{ABC} = S_{AKOM} + S_{BKOL} + S_{CMOL}$

$$\frac{a^2}{2 \sin \alpha} + \frac{b^2}{2 \sin \beta} + \frac{c^2}{2 \sin \gamma}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\sin \alpha} + \frac{b^2}{\sin \beta} + \frac{c^2}{\sin \gamma} \right)$$

④

$l_1:$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

$$(2, -1, 2) + t(1, 2, -2)$$

$l_2:$

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$$

$$(5, 0, -2) + k(2, -1, -2)$$

⑤

$M(3, 1, 0)$

$$\begin{aligned}
 2+t &= 5+2k \Rightarrow t-2k=3 \\
 -1+2t &= 0-k \Rightarrow 2t+k=1 \\
 2-2t &= -2+2k \Rightarrow -2t+2k=-4 \quad |:(-2)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 2+t \\ -1+2t \\ 2-2t \end{aligned}} \right\} + \left. \vphantom{\begin{aligned} 2t+k=1 \\ t-k=2 \end{aligned}} \right\}$$

A	B	C
1	2	-2
2	-1	-2

$$6x + 2y + 5z + 0 = 0$$

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 3 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$18 + 2 + 0 + 0 = 0$$

$$D = -20$$

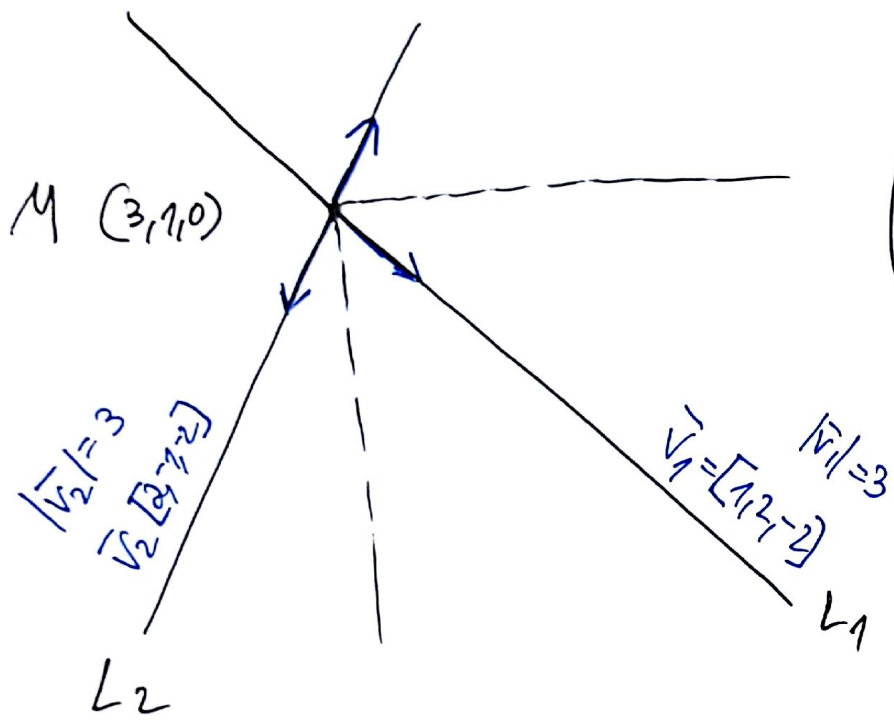
$$6x + 2y + 5z - 20 = 0$$

$$3t = 3$$

$$\begin{array}{l}
 t = 1 \\
 k = -1
 \end{array}$$

$$\vec{n}(-6, -2, -5)$$

$$\vec{n}(6, 2, 5)$$



מרחב
הצורה
החדש

$$(3, 1, 0) + W \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right) \pm \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right) \right)$$

- ① $(3, 1, 0) + W \left(1, \frac{1}{3}, \frac{-4}{3} \right) \Rightarrow (3, 1, 0) + W(3, 1, -4)$
- ② $(3, 1, 0) + W \left(\frac{1}{3}, -1, 0 \right) \Rightarrow (3, 1, 0) + W(1, -3, 0)$

$A(3, -6, 1)$

AM: $(3, 1, 0) + P(0, 7, -1)$
 $(3, 1, 0) + W(1, -3, 0)$

① $(3, 1, 0) + W(3, 1, -4)$

$$\cos \alpha = \frac{|(0, 7, -1) \cdot (1, -3, 0)|}{|0, 7, -1| |1, -3, 0|} = \frac{21}{\sqrt{50} \sqrt{10}}$$

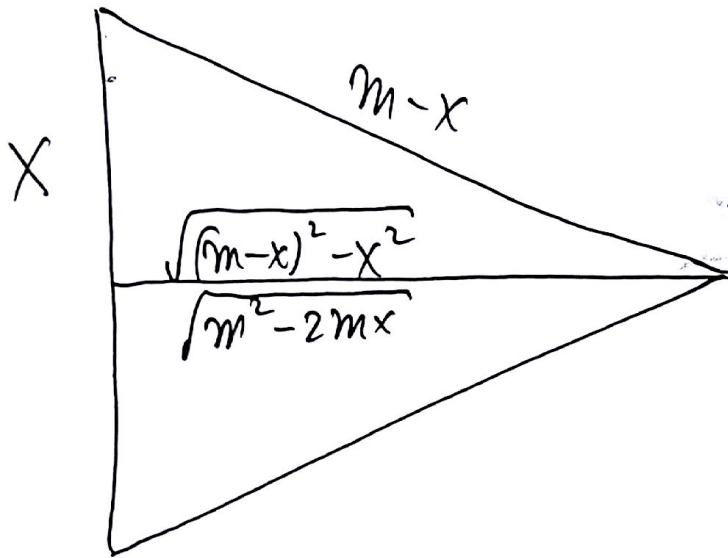
$$\cos \alpha = \frac{|(0, 7, -1) \cdot (3, 1, -4)|}{|0, 7, -1| |3, 1, -4|} = \frac{11}{\sqrt{50} \sqrt{26}}$$

הצורה החדשה AM החדשה היא מרחב

הצורה החדשה מרחב $\Leftarrow \sin \alpha = \frac{|(0, 7, -1) \cdot (6, 2, 5)|}{|0, 7, -1| |6, 2, 5|} = \frac{9}{\sqrt{50} \sqrt{65}}$

②④

(E) (5)



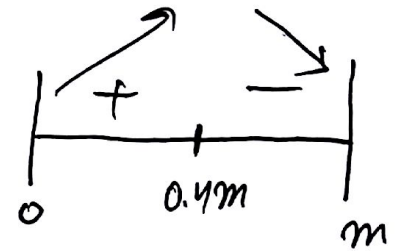
$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \sqrt{m^2 - 2mx}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \sqrt{m^2 x^4 - 2mx^5} = \frac{1}{3} \pi \sqrt{m} \sqrt{mx^4 - 2x^5}$$

$$V' = \frac{4mx^3 - 10x^4}{2\sqrt{\quad}} = 0$$

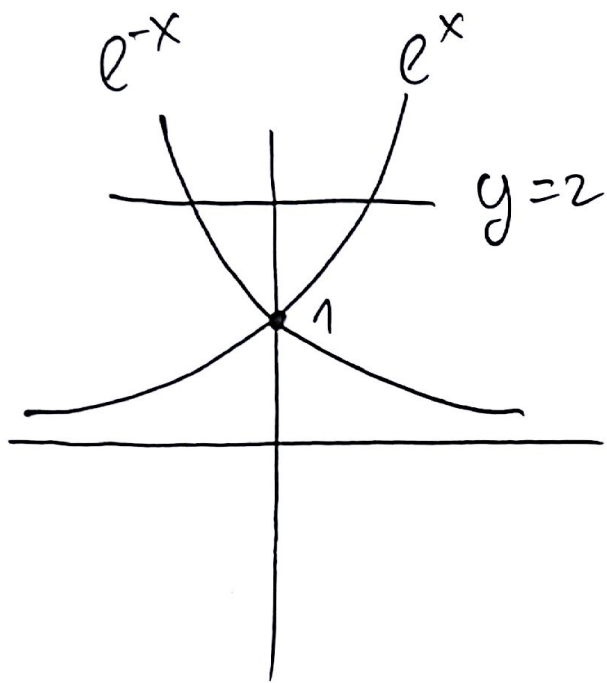
$$2x^3(2m - 5x) = 0$$

$$x = \frac{2m}{5} = 0.4m$$



$$V(x = \frac{2}{5}m) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4m^2}{25} \cdot \sqrt{m^2 - 2m \cdot \frac{2m}{5}} = \frac{4m^2 \pi}{3 \cdot 25} \sqrt{\frac{5m^2 - 4m^2}{5}} =$$

$$\frac{4m^2 \pi}{75} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{5}} = \boxed{\frac{4m^3 \pi}{75\sqrt{5}}}$$



$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

$$\int_0^{\ln 2} 2 - e^x dx = 2x - e^x \Big|_0^{\ln 2}$$

$$(2 \ln 2 - e^{\ln 2}) - (0 - e^0)$$

$$\ln 4 - 2 + 1 = \ln 4 - 1 = \ln 4 - \ln e$$

$$\ln \left(\frac{4}{e} \right)$$

$$S = 2 \ln \frac{4}{e}$$

5 2

$$z^5 + 2z - \sqrt{12}i z = 0$$

$$z(z^4 + 2 - \sqrt{12}i) = 0$$

↓

$$z = 0$$

$$z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

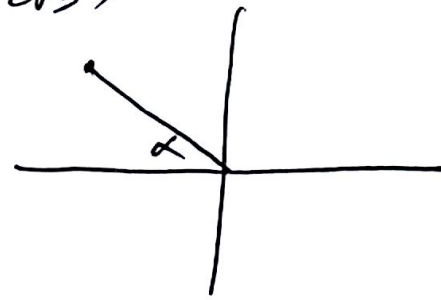
$$z^4 = 4 \operatorname{cis} 120$$

$$z = \sqrt[4]{4} \operatorname{cis} \left(\frac{120 + 360k}{4} \right)$$

$$z = \sqrt{2} \operatorname{cis} (30 + 90k)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$(-2, 2\sqrt{3})$



$$R = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60$$

$\alpha^* = 120$

$$4 \operatorname{cis} 120$$

$$z^n = R \operatorname{cis} \alpha$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha + 360k}{n} \right)$$

6
?

$$|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) \leq 15$$

$$x^2 + y^2 + 2y \leq 15$$

$$x^2 + (y+1)^2 \leq 16$$

$$(0, -1) \quad R=4$$

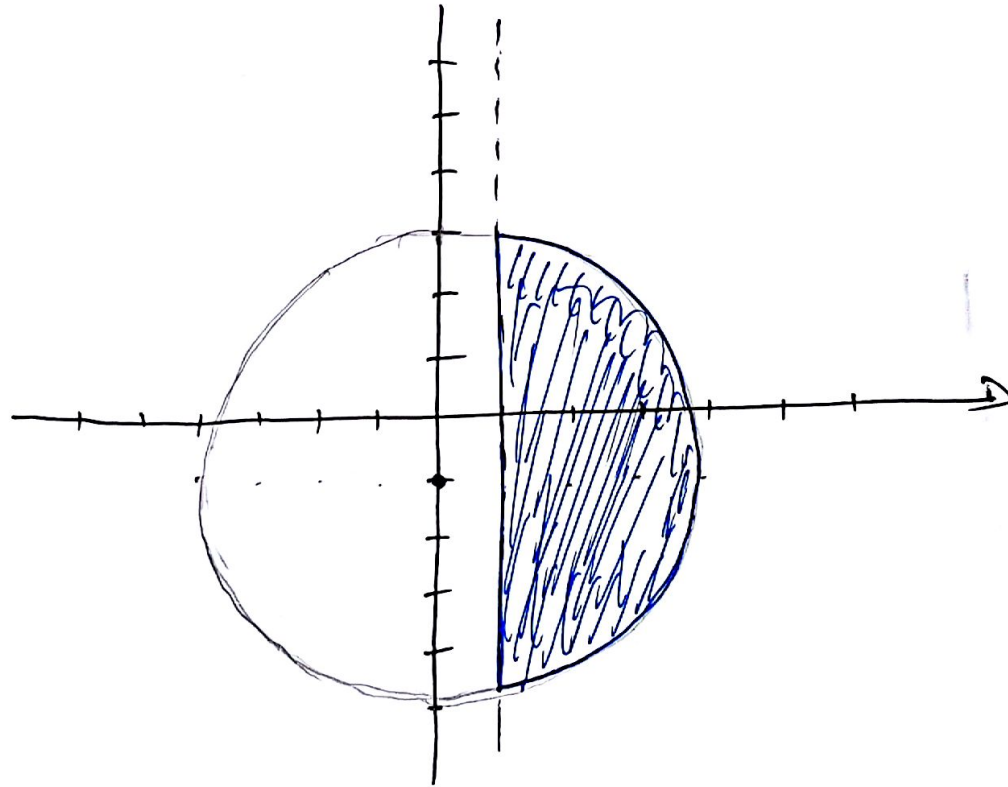
$$|z-2| \leq |z|$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad |C|^2$$

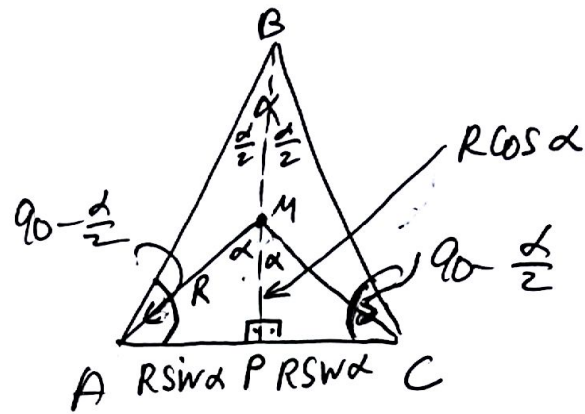
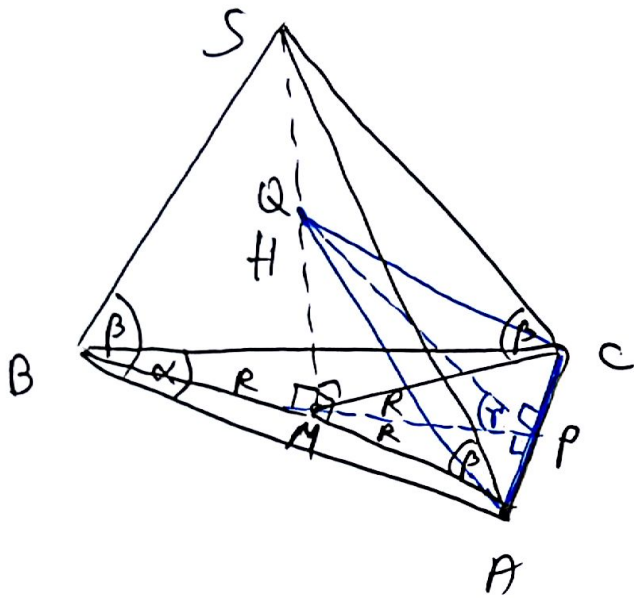
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 \leq x^2 + y^2$$

$$4 \leq 4x$$

$$1 \leq x$$



7



$$S' = 2R^2 \sin \alpha \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) \sin(90 - \frac{\alpha}{2})$$

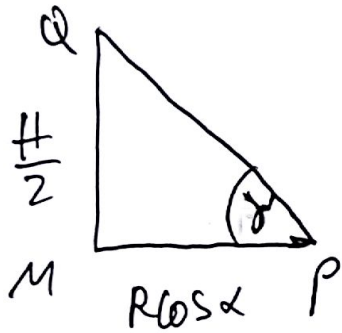
$$S' = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} //$$

8

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{R} \Rightarrow H = R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot R \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{2R^3}{3} \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$$

9



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{H}{2R \cos \alpha} = \frac{R \operatorname{tg} \beta}{2R \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}$$

QAC 7leIN
 ' e'e
 QMA e'leN
 e'leN f' 8'2/h
 QMC
 ⇓
 QA = QC

$$y = \frac{x^2 + 4x + 19}{nx^2 - 6x + m}$$

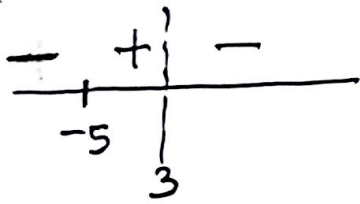
(2)

$$y = \frac{x^2 + 4x + 19}{x^2 - 6x + 9} \leftarrow (x-3)^2$$

$$y' = \frac{(2x+4)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2+4x+19)}{(x-3)^4}$$

$$\frac{2(x-3)((x+2)(x-3) - x^2 - 4x - 19)}{(x-3)^4}$$

$$\frac{2(x^2 - x - 6 - x^2 - 4x - 19)}{(x-3)^3} = \frac{2(-5x - 25)}{(x-3)^3}$$



$$x \neq 3$$

$$x = 3 \text{ אינו}$$

$$y = 4 \text{ אקזטרם}$$

$$x = 0 \left(0, \frac{19}{9}\right)$$

קצת מלמך
x

$$\boxed{\text{MIN}} \\ \left(-5, \frac{3}{8}\right)$$

אם $F(x) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{n}$
 $x \rightarrow \pm \infty$

$$\boxed{n = \frac{1}{2}}$$

\Downarrow

$$\frac{1}{2}x^2 - 6x + m$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 2m)$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) \quad 36 + 2m$$

$$\frac{1}{2}(x-6)^2$$

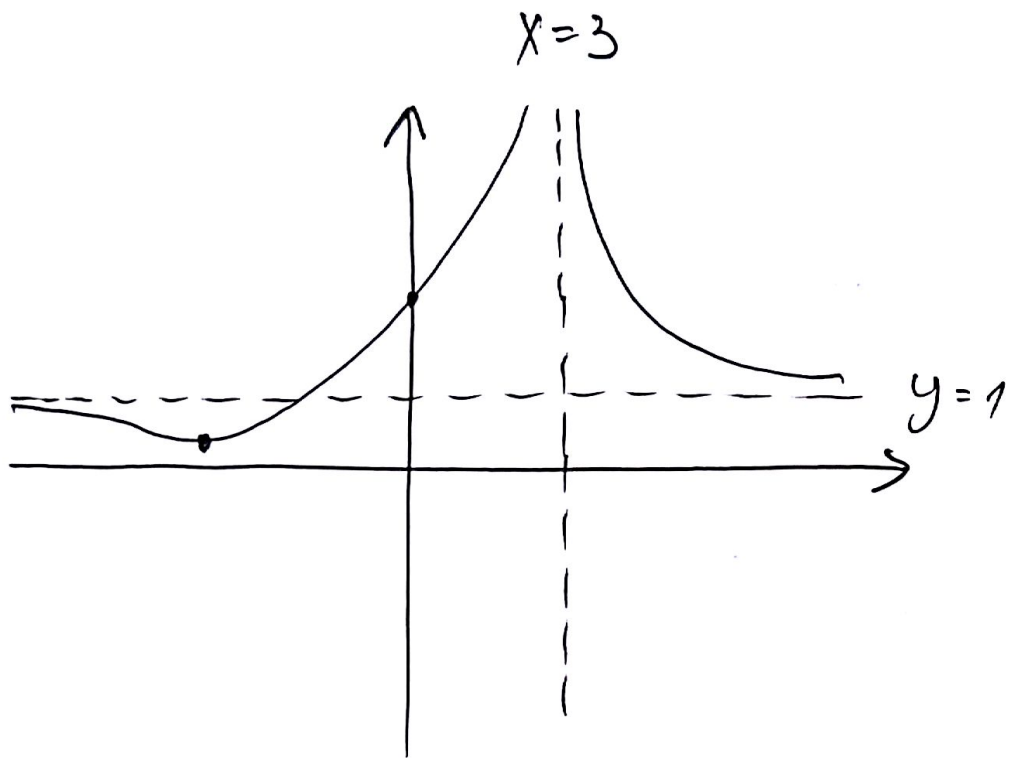
$$2m = 36$$

$$\boxed{m = 18}$$

אם $y = 2$ אקזטרם
 רק עדיף לומר
 גבולות אינה אקזטרם

(8)

(10)



$$F(x) = ax^2 - 16x + b$$

$$g(x) = \frac{-6a}{x} = -6a \cdot x^{-1}$$

(g)

$$F' = 2ax - 16$$

$$g' = 6a \cdot x^{-2} = \frac{6a}{x^2}$$

$$F'(3) = 6a - 16$$

$$g'(3) = \frac{6a}{9} = \frac{2a}{3}$$

(k)

$$6a - 16 = \frac{2a}{3}$$

$$3a - 8 = \frac{a}{3}$$

$$9a - 24 = a$$

$$8a = 24$$

$$F(x) = 3x^2 - 16x + b$$

$$-6 = 27 - 48 + b$$

$$b = 15$$

$$F(x) = 3x^2 - 16x + 15$$

$$\leftarrow a = 3$$

$$g(x) = \frac{-18}{x}$$

$$g(3) = -6$$

$$(3, -6)$$

(p)

$$F(x) = g(x)$$

$$3x^2 - 16x + 15 = \frac{-18}{x}$$

$$3x^3 - 16x^2 + 15x + 18 = 0$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{16}{3}$$

$$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{-18}{3} = -6 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} x_2 + x_3 = \frac{16}{3} - 3 = \frac{7}{3} \\ x_2 \cdot x_3 = \frac{-6}{3} = -2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0 \\ 3x^2 - 7x - 6 = 0 \\ x = 3 \quad x = -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 3 \\ x = -\frac{2}{3} \end{matrix}$$