

יערפוט אהי כיתת האט צל האחקרת!!

מבחן גמר במתמטיקה

משך המבחן 4 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
יש לפתור שתיים מהשאלות 1-3, אחת מהשאלות 4-5, שאלה 6, ושתיים מהשאלות 7-9!

תיבדקנה רק התשובות הראשונות בכל מקבץ של שאלות בחירה!!!

סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!

שאלה 1 (15%)

בפירמידה SABCD הבסיס ABCD הוא מקבילית שבה נתונות הנקודות $B(3, -7, -1), D(6, -5, 1)$

ונתונות משוואות הצלעות $AD: \frac{x-14}{4} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z+5}{-3}$, $AB: \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-14}{-5}$, והקודקוד $S(1, 1, 1)$.

5% א. מצא את שיעורי הקודקודים A ו-C.

5% ב. חשב פונקציה טריגונומטרית של הזווית בין מישור הבסיס ובין הישר MC כאשר M היא אמצע SB.

5% ג. מה נפח הפירמידה?

שאלה 2 (15%)

במשולש חד-זווית ABC, AN, CM, BL הם גבהים. הוכח:

3% א. הנקודות A, M, N, C נמצאות על מעגל אחד.

6% ב. $\triangle ABC \sim \triangle BMN$. (באופן דומה המשולשים $\triangle NLC$ ו- $\triangle AML$ דומים ל- $\triangle ABC$, אין צורך בהוכחה)

6% ג. MC חוצה-זווית $\angle LMN$.

שאלה 3 (15%)

נתונה המשוואה $\sqrt{49 - 70x + 25x^2} - \sqrt{(5x + 9)^2} = m$.

9% א. מצא את המספר השלם m הגדול ביותר שעבורו למשוואה פתרון אחד בלבד.

6% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה פתרון אחד בלבד הקטן מ-1?

* * * * *

שאלה 4 (15%)

6% א. בכמה אופנים ניתן להושיב 8 אנשים סביב שני שולחנות עגולים זהים בעלי 4 מקומות כל אחד?

9% ב. מצא בפיתוח של הבינום $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{b} + \frac{1}{\sqrt[15]{a^{28}}} \right)^n$ איבר שאינו מכיל את a, אם סכום המקדמים

הבינומיאליים הנמצאים במקום הראשון מהתחלה והשני והשלישי מהסוף הוא 79.

שאלה 5 (15%)

9% א. עבור אילו ערכים של a יש למשוואה $(6\sin^2 x - \sin x - 1) \cdot (a \sin x + 3a - 2) = 0$

בדיוק שלושה פתרונות שונים הנמצאים בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{7\pi}{6}$?

6% ב. פתור: $\lg \sqrt{35 - 5^{\sqrt[3]{x-1}}} \geq \frac{1}{2}$.

שאלה 6 (15%) - שאלת חובה!

בבסיס של חרוט ישר חסום ריבוע בעל צלע a .

מישור העובר דרך צלע של הריבוע וקודקוד החרוט

יוצר בחתך עם החרוט משולש שזווית הראש שלו היא α .

6% א. מה שטח המשולש?

9% ב. מה נפח החרוט?

* * * * *

שאלה 7 (20%)

נתונה הפונקציה $y = \frac{(x-3a)^2}{(x-a)^4}$, $a < 0$

א. חקור את הפונקציה:

2% (1) תחום הגדרה.

3% (2) נקודות חיתוך עם הצירים.

2% (3) אסימפטוטות.

2% (4) תחומי עליה וירידה.

2% (5) נקודות קיצון.

3% (6) צייר רשומת (סקיצה) של הגרף.

6% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $|x-3a| = m(x-a)^2$ שלושה פתרונות?

שאלה 8 (20%)

10% א. פתור את המשוואה $z^3 - (1+4i)z^2 - (3-4i)z + 3 = 0$ אם נתון השורש $z_1 = i$.

10% ב. על הישר $2x - y + 6 = 0$ מצא נקודה המרוחקת ממרכז המעגל $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0$ מרחק השווה לקוטר המעגל.

שאלה 9 (20%)

10% א. בסדרה הגיאומטרית $a_1 = 1+i$, $a_2 = 2$,

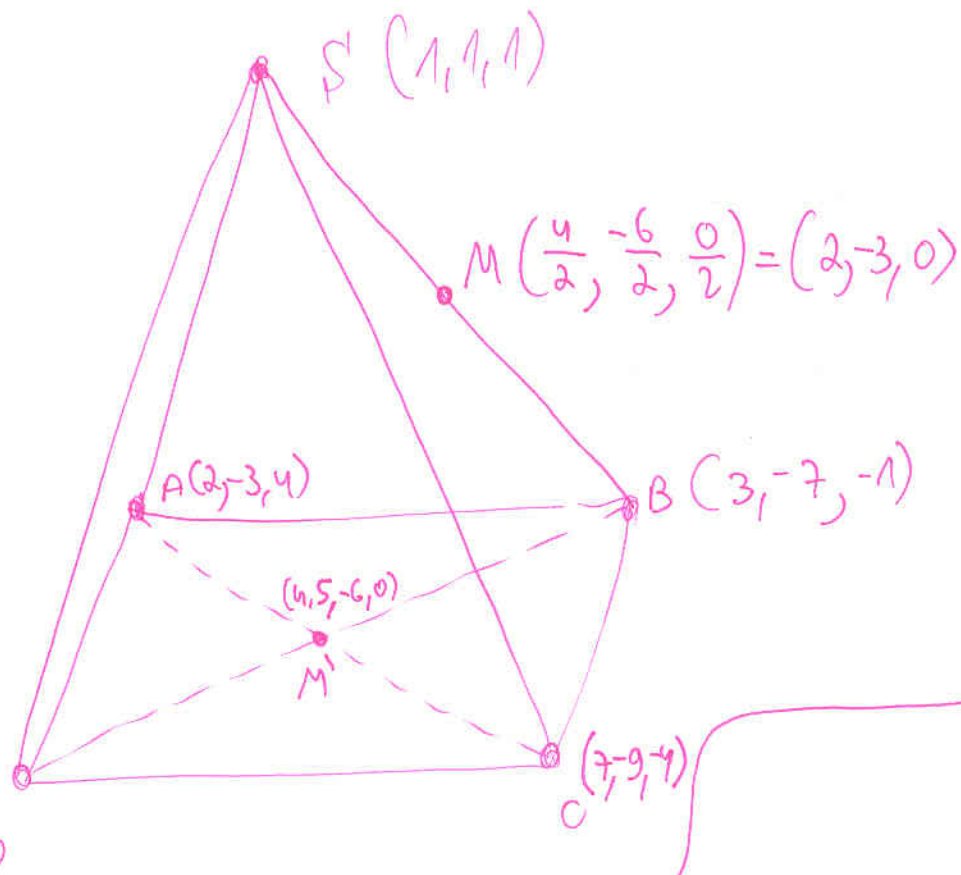
הוכח שהאיברים הנמצאים במקומות $4n+2$ הם ממשיים.

ב. נתונים שני מעגלים $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 41 = 0$.

4% (1) מה הוא המצב ההדדי בין שניהם?

6% (2) מצא את משוואות המשיקים המשותפים למעגלים.

בהצלחה!



$(6, -5, 1)$ $G = (7, -9, -4)$

$M' = \left(\frac{9}{2}, \frac{-12}{2}, \frac{0}{2}\right) = (4, 5, -6, 0)$

$(x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_1}{\alpha} = \frac{y_1 - y_1}{\beta} = \frac{z_1 - z_1}{\gamma}$

1) a) a) a)

AB: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-14}{-5}$

AD: $\frac{x-14}{4} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z+5}{-3}$

(c) $\begin{cases} -4x = y - 5 & y = -4x + 5 \\ -x + 14 = 2y + 18 \end{cases}$

$-x + 14 = 2(-4x + 5) + 18$
 $-x + 14 = -8x + 10 + 18$
 $-x + 14 = -8x + 28$

$7x = 14 \quad | \quad z - 14 = -5x$
 $x = 2 \quad | \quad z = 14 - 5x$
 $y = -3 \quad | \quad z = 14 - 10$
 $z = 4$

$A(2, -3, 4)$

האם זה נכון?

①

A	B	C
1	-4	-5
4	-2	-3

$$\vec{n} (2, -17, 14)$$

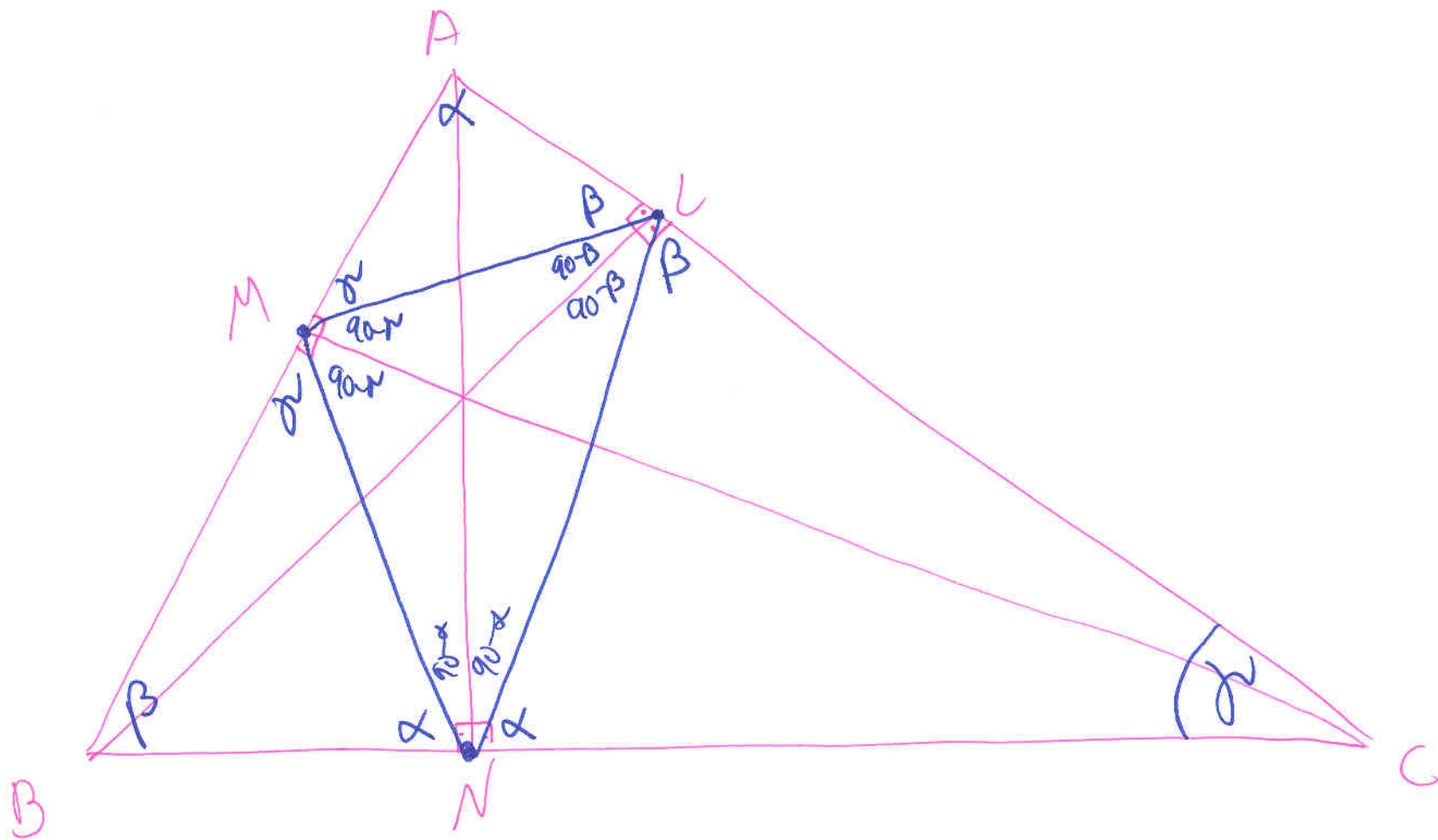
$$\vec{MC} = (7-2, -9+3, -4-0) = (5, -6, -4)$$

$$\sin \phi = \frac{|(5, -6, -4) \cdot (2, -17, 14)|}{|(5, -6, -4)| |(2, -17, 14)|} = \frac{10 + 102 - 56}{\sqrt{489} \sqrt{77}} = \boxed{\frac{56}{\sqrt{489} \sqrt{77}}}$$

②

$$\left| \frac{(\vec{BA} \times \vec{BC}) \cdot (\vec{BS})}{3} \right| = \left| \frac{(2, -17, 14) \cdot (2, -8, -2)}{3} \right| = \frac{|4 + 136 - 28|}{3} = \boxed{\frac{112}{3}}$$

(נתון: $\angle B = 90^\circ$) הוכח



$$\sqrt{(7-5x)^2} - \sqrt{(5x+9)} = m$$

$$y = |7-5x| - |5x+9|$$

$$x < -\frac{9}{5} \quad -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{7}{5} \quad x > \frac{7}{5}$$

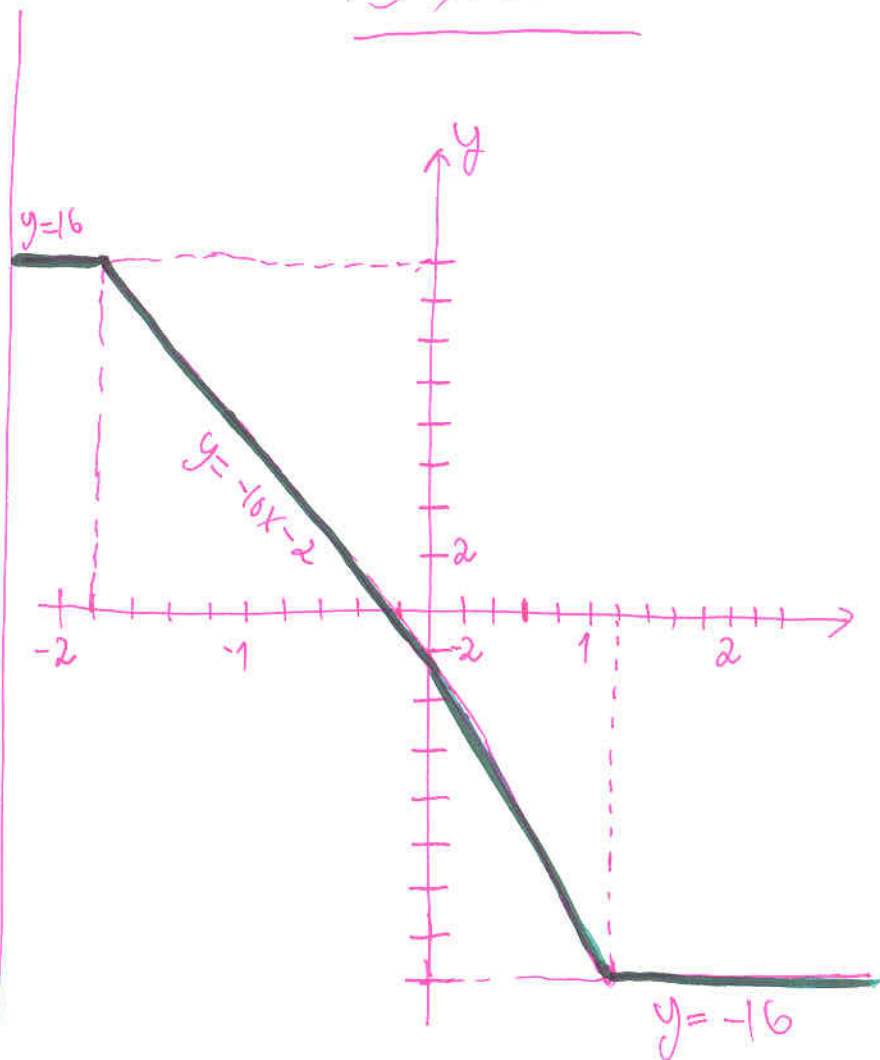
$y = 7 - 5x + 5x + 9$ $y = 16$	$y = 7 - 5x - 5x - 9$ $y = -10x - 2$	$y = -7 + 5x - 5x - 9$ $y = -16$
-----------------------------------	---	-------------------------------------

① $m = 15$

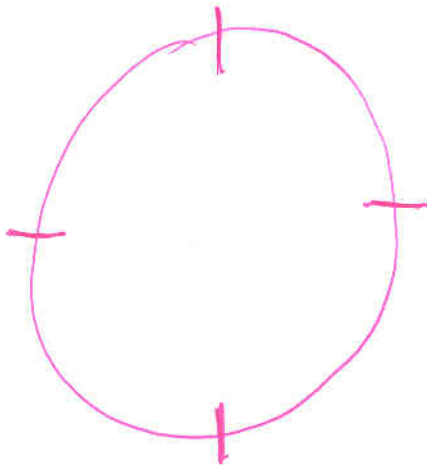
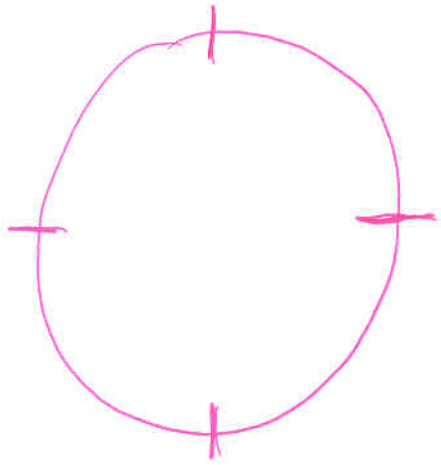
② $x = -1 \Rightarrow y = 10 - 2 = 8$

$8 < m < 16$

3, 7, 8, 9



(k)



4 → 0 k e

$$\frac{C_8^4 \cdot 3! \cdot 3!}{2!}$$

(2)

$$\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{b} + \frac{1}{a^{\frac{28}{15}}} \right)^n \Rightarrow C_n^k \cdot \left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{b} \right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{28}{15}}} \right)^k = C_{12}^k \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}(12-k)} \cdot a^{-\frac{28}{15}k}}{b^{12-k}}$$

$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \dots$

$C_n^{n-2} \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$

$$C_n^0 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Rightarrow$$

$$1 + n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 79$$

$$2 + 2n + n^2 - n = 158$$

$$n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow \boxed{n=12} \quad \rightarrow n=-13$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}(12-k) &= \frac{28k}{15} \\ 20(12-k) &= 28k \\ 20 \cdot 12 &= 48k \\ 20 \cdot 2 &= 8k \\ k &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$C_{12}^5 \cdot \frac{1}{b^7}$$

$$\frac{792}{b^7}$$

1

$$(6\sin^2 x - \sin x - 1)(a \sin x + 3a - 2)$$

$$6t^2 - t - 1 = 0$$

$$6t^2 - 3t + 2t - 1 = 0$$

$$3t(2t - 1) + 1(2t - 1) = 0$$

$$(2t - 1)(3t + 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad | \quad t = -\frac{1}{3}$$



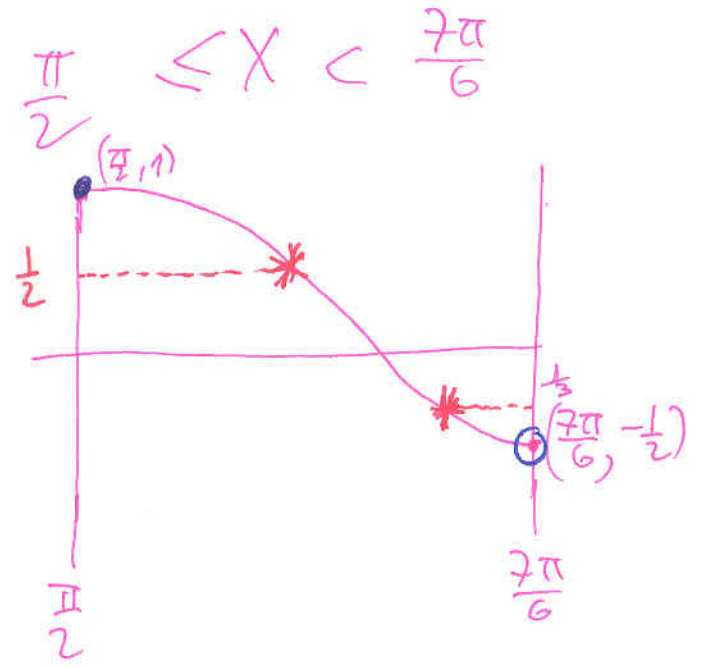
קב"נ
ק"נ"ב



קב"נ
ק"נ"ב

מקבלים 2 נקודות
מותרות (2)

יש נקודה



$$\sin x = \frac{2-3a}{a}$$

3/2 | 1/2 | 0 | 1 | 2

$$\sin x \neq \frac{1}{2} \quad -1$$

$$\sin x \neq -\frac{1}{3} \quad -1$$

$$\frac{2-3a}{a} = 1$$

$$2-3a = a$$

$$2 = 4a$$

$$\frac{1}{2} = a$$

$$\frac{2-3a}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$4-6a = -a$$

$$4 = 5a$$

$$\frac{4}{5} = a$$

$$\frac{2-3a}{a} \neq \frac{1}{2}$$

$$4-6a \neq a$$

$$4 \neq 7a$$

$$\frac{4}{7} \neq a$$

$$\frac{2-3a}{a} \neq -\frac{1}{3}$$

$$3(2-3a) \neq -a$$

$$6 \neq 8a$$

$$\frac{3}{4} \neq a$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{5}$$

$$a \neq \frac{3}{4}, \frac{4}{7}$$

②

$$\log_{10} \sqrt{35 - 5^{\sqrt[3]{x-1}}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_{10} (35 - 5^{\sqrt[3]{x-1}}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\log_{10} (\quad) \geq \log_{10} 10$$

$$35 - 5^{\sqrt[3]{x-1}} \geq 10$$

$$25 \geq 5^{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$2 \geq \sqrt[3]{x-1}$$

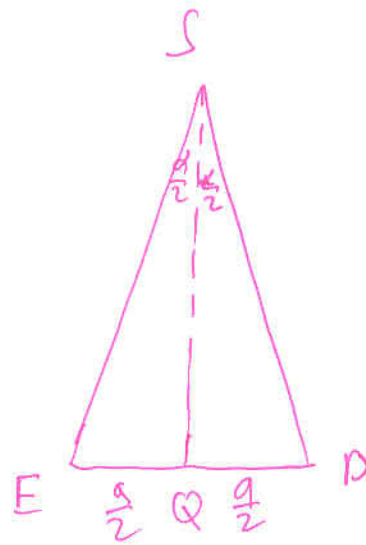
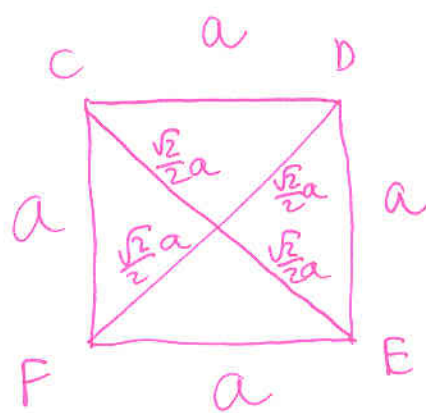
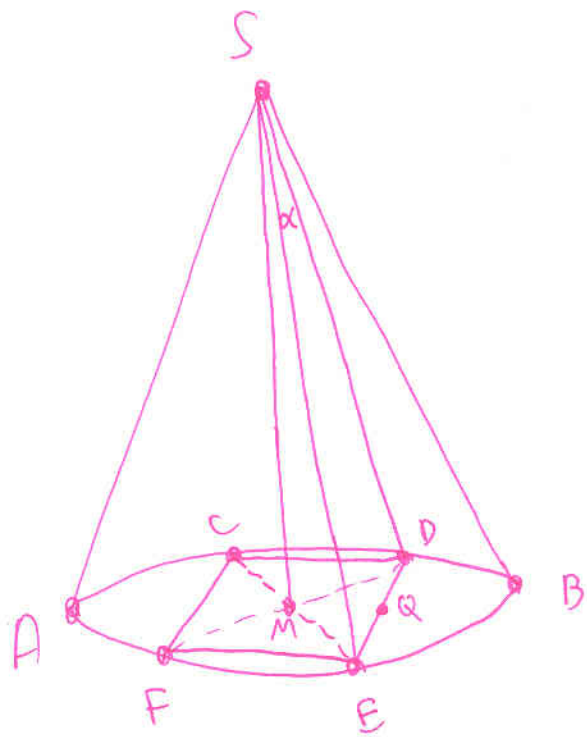
$$8 \geq x-1$$

$$\boxed{9 \geq x}$$

הצגתה של
האינשווה

: קטנה 5 היתה

$$\rightarrow 35 - 5^{\sqrt[3]{x-1}} > 0$$



ob λ δ e

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2SQ} \quad (k)$$

$$SQ = \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$S = \frac{a^2}{4} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$SM^2 + MQ^2 = SQ^2$$

$$SM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$$

$$SM^2 = \frac{a^2}{4} \left(\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$$

$$SM = \frac{a}{2} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot SM$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$\frac{a^3}{12} \pi \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$\frac{a^3 \pi}{12} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{a^3 \pi \cdot \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$y = \frac{(x-3a)^2}{(x-a)^4} \quad a < 0$$

$$\textcircled{1} \quad x \neq a$$

$$\frac{(2a)^2}{(4a)^4} = \frac{4a^2}{256a^4} = \frac{1}{64a^2}$$

\Rightarrow нбке

\textcircled{A}

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{9a^2}{a^4} = \frac{9}{a^2} \quad \textcircled{(0, \frac{9}{a^2})} \textcircled{2}$$

$$y=0 \quad x=3a \quad \textcircled{(3a, 0)} \textcircled{2}$$

$$2(x-3a)(x-a)^3(5a-x) = 0$$

$$x=3a$$

$$x=5a$$

$$\textcircled{5} \quad \textcircled{(3a, 0)} \text{ min}$$

$$\textcircled{(5a, \frac{1}{64a^2})} \text{ max}$$

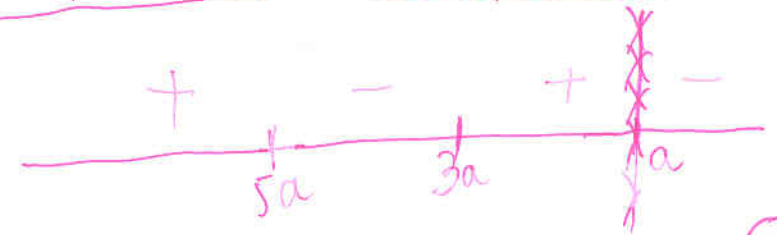
$$x=a$$

нбке
нбке

нбке

$$y=0$$

нбке
нбке



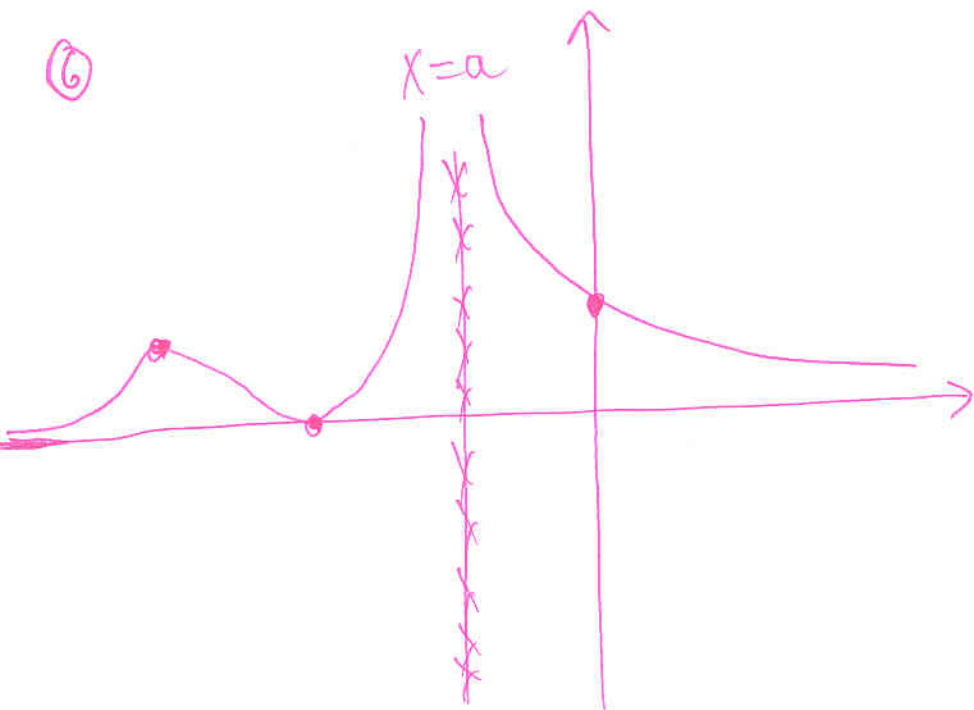
$3a < x < a$	<u>нбке</u>
$x < 5a$	
$5a < x < 3a$	<u>нбке</u>
$x > a$	

$$y' = \frac{2(x-3a)(x-a)^4 - 4(x-a)^3(x-3a)^2}{(x-a)^8} = 0$$

$$2(x-3a)(x-a)^3 [(x-a) - 2(x-3a)] = 0$$

$$2(x-3a)(x-a)^3 (x-a-2x+6a) = 0$$

⑥

! ? e n n 7 a d k e

$$|x-3a| = m(x-a)^2$$

⑦

$$y = \frac{(x-3a)^2}{(x-a)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-3a)^2}{(x-a)^4} = m^2$$

$$m^2 = \frac{1}{64a^2}$$

$$m = \frac{1}{8|a|}$$

$$\textcircled{c} \quad z^3 - (1+4i)z^2 - (3-4i)z + 3 = 0$$

$$i(z_2 \cdot z_3) = -3$$

$$-(i + z_2 + z_3) = -(1+4i)$$

$$z_2 + z_3 = 1+3i$$

$$z_2 = 1+3i - z_3$$

$$i(1+3i - z_3)z_3 = -3$$

$$(i - 3 - z_3 i)z_3 = -3$$

$$-z_3^2 i + z_3 i - 3z_3 + 3 = 0$$

$$z_3^2 i - z_3 i + 3z_3 - 3 = 0$$

$$\boxed{z_3^2 i + (3-i)z_3 - 3 = 0}$$

18 Schritte

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

$$(z - z_1)(z^2 - z(z_2 + z_3) + z_2 z_3)$$

$$z^3 - z^2(z_2 + z_3) + z(z_2 \cdot z_3)$$

$$- z^2(z_1) + z(z_2 + z_3)(z_1) - (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)$$

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)z - (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)$$

2.7.2017 8.18.17

$$\sqrt{8+6i} = x+iy$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \\ x = \frac{3}{y} \end{cases}$$

$$\frac{9}{y^2} - y^2 = 8$$

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0$$

$$(y^2 + 9)(y^2 - 1) = 0$$

$$y = 1 \quad y = -1$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

$$\frac{i-3 \pm \sqrt{(3-i)^2 - 4i(-3)}}{2i} = \frac{i-3 \pm \sqrt{8+6i}}{2i}$$

$$\frac{i-3 \pm (3+i)}{2i} \rightarrow \frac{2i}{2i} = 1 \Rightarrow z_3 = 1 \Rightarrow z_2 = 3i$$

$$\frac{i-3 \pm (3-i)}{2i} \rightarrow \frac{-6}{2i} = \frac{-3}{i} = 3i \Rightarrow z_3 = 3i \Rightarrow z_2 = 1$$

ipn altemn le nktvsn

$i, 3i, 1$

2) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 13$

$(3, -4) \quad R = \sqrt{13}$

$2R = 2\sqrt{13}$

$(t, 2t+6) \Rightarrow (t-3)^2 + (2t+6+4)^2 = 13 \cdot 4$

$$t^2 - 6t + 9 + 4t^2 + 40t + 100 = 13 \cdot 4$$

$$5t^2 + 34t + 57 = 0$$

$$t = -3 \quad t = \frac{-19}{5}$$

$(-3, 0) \quad (\frac{-19}{5}, \frac{-8}{5})$

Ⓐ

∴ g אפק

$$a_2 = 2$$

$$a_1 = 1+i$$

$$g = \frac{2}{1+i} = 1-i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(-45)$$

$$a_{4n+2} = a_1 \cdot g^{4n+1} = \sqrt{2} \operatorname{cis}45 \cdot (\sqrt{2})^{4n+1} \operatorname{cis}(-45(4n+1)) =$$

$$(\sqrt{2})^{4n+2} \operatorname{cis}(45 - 4n - 45) = 2^{2n+1} \operatorname{cis}(-180n)$$

$$\operatorname{cis}(-180n) = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \rightarrow -1 \end{matrix}$$

$$\Downarrow \\ \downarrow \text{ענן } n > 1 \downarrow$$

Ⓒ $x^2 + y^2 = 25$ $(0,0)$ $R=5$

$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 4$ $(3,-6)$ $R=2$

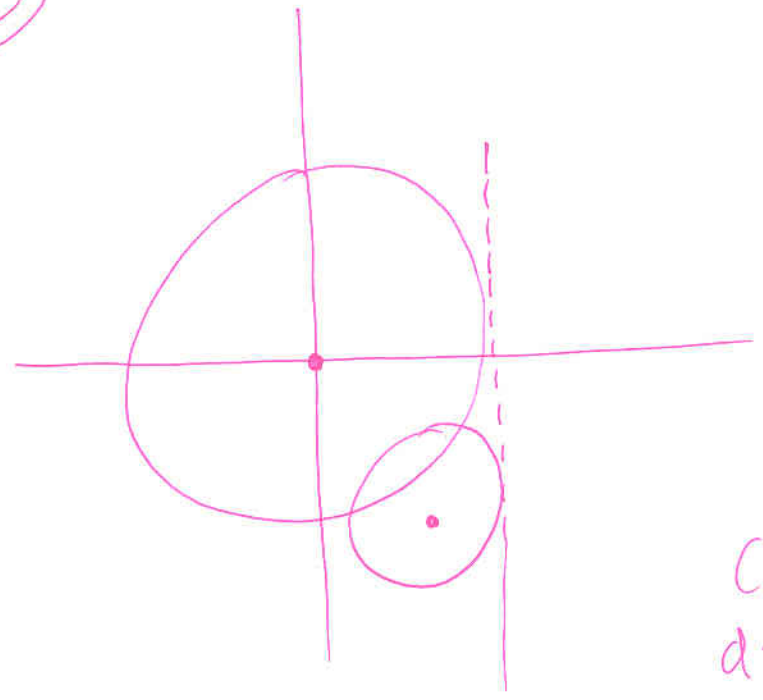
$$3 < \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} < 7$$

Ⓐ

פירוש פירוש

קבוצת המספרים הממשיים

2



$$y = mx + n$$

$$mx - y + n = 0$$

$(0,0)$
 $d=5$

$(3,-6)$
 $d=2$

הנקודה היא נקודה חיצונית
למעגל הקטן יותר
אם כן נקודה חיצונית
למעגל הגדול יותר

הנקודה
 $x=5$

$$|n| = 5\sqrt{\quad}$$

$$|3m+6+n| = 2\sqrt{\quad}$$

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

$$\frac{|3m+6+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$$\frac{|n|}{1} = \frac{5}{2}$$

2) $|n| = 5$

$$2n = 5(3m+6+n)$$

$$2m = 15m+30+5n$$

$$n = -5m - 10$$

$$n^2 = 25(m^2+1)$$

$$25(m+2)^2 = 25(m^2+1)$$

$$m^2+4m+4 = m^2+1$$

$$m = -\frac{3}{4}$$

$$n = -\frac{25}{4}$$

$$n = \frac{-15m-30}{7}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

$$\frac{25(3m+6)^2}{49} = 25(m^2+1)$$

$$25(9m^2+m+36) = 25 \cdot 49(m^2+1)$$

$$0 = 40m^2 - m + 13$$

$$\Delta < 0$$