

מבחן גמר במתמטיקה - מועד ב'

משך המבחן 3 שעות. אין לצאת מהכיתה ב- 45 הדקות האחרונות של המבחן!
 כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה!

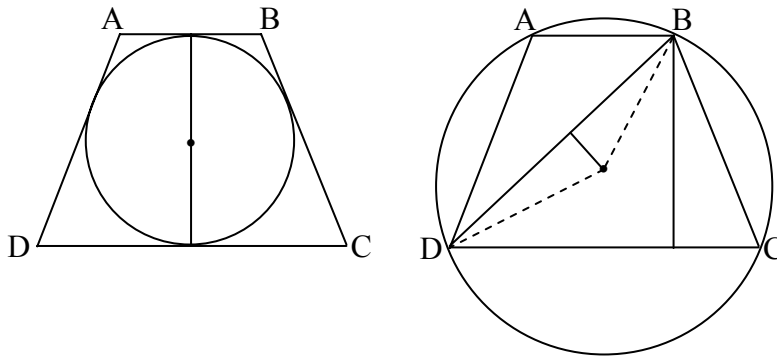
פתרו אחת מהשאלות 1 או 2

שאלה מס' 1 (15%)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos x + \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} = 1$

שאלה מס' 2 (15%)

פתרו את אי השוויון: $\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}$



שאלה מס' 3 (15%) - שאלת חובה!

נתון טרפז ABCD שחסום במעגל וחוסם מעגל. רדיוס המעגל החסום הוא r . רדיוס המעגל החוסם הוא R . בסיסי הטרפז $AB = 2x$ ו- $CD = 2y$. הזווית החדה של הטרפז היא 2α . הוכח:

א. (5%) $x + y = \frac{2r}{\sin 2\alpha}$

ב. (4%) 1. $BD = 2R \cdot \sin 2\alpha$ 2. $BD^2 = (2r)^2 + (x + y)^2$

ג. (6%) היחס בין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז לבין רדיוס המעגל החסום על ידו הוא $\frac{R}{r} = k$.

1. הוכח: $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4k^2}}}{\sqrt{2} \cdot k}$

2. נתון $k = \sqrt{20}$. מצא את הזווית החדה של הטרפז.

שאלה מס' 4 (15%) - שאלת חובה!

במנסרה $ABC A'B'C'$, הנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים של בסיס המשולש ABC.

נתון: $A(3, 0, -1)$, $B(2, 4, 5)$, $C(-3, 2, 2)$, $A' = (0, 1, -1)$.

א. (5%) רשמו את משוואת המישור ABC.

ב. (5%) חשבו את הזווית שיוצר הישר $B'M$ עם מישור הבסיס ABC.

ג. (5%) חשבו את נפח המנסרה.

פתרו אחת מהשאלות 5 או 6

שאלה מס' 5 (15%)

- א. (12%) דרך נקודה $A(x_0, y_0)$ שעל גרף הפונקציה $y = \sqrt{ax}$, $a > 0$, מעבירים משיק החותך את ציר ה- y בנקודה B . מחברים את הנקודה A עם הראשית O . גרף הפונקציה מחלק את שטח המשולש OAB לשני חלקים: חלק עליון ששטחו S_1 וחלק תחתון ששטחו S_2 . הוכיחו: היחס $\frac{S_2}{S_1} = 2$ (אינו תלוי במיקומה של הנקודה A וגם לא בפרמטר a).

- ב. (4%) מצאו את שיעור הנקודה A , אם נתון: $a = 9$, $S_1 = 2$.

שאלה מס' 6 (15%)

- א. (7%) הוכיחו: לכל n זוגי, המספר $7^n - 2^{2n}$ מתחלק ב-33.
- ב. הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. $u_1 = 2 + i$, $u_2 = 1 + 3i$, $u_3 = -2 + 4i$.
- (4%) חשבו את u_6 .
 - (4%) כמה איברים צריך לסכום כדי לקבל את הסכום $63 + 34i$?

שאלה מס' 7 (20%) - שאלת חובה!

- המנסרה $ABCA'B'B$ חסומה בגליל מעגלי ישר, כך שהפאה $AA'B'B$ עוברת דרך קוטר המעגל של בסיסי הגליל. האלכסון $A'B$ יוצר עם מקצועות הבסיס הצמודים לו את הזוויות הבאות: את זווית α עם המקצוע BC ואת הזווית β עם המקצוע BA . גובה הגליל שווה - H .
- (6%) הוכיחו: בסיס המנסרה הוא משולש ישר זווית.
 - (14%) הביעו את נפח המנסרה באמצעות H , β , α .

פתרו אחת מהשאלות 8 או 9

שאלה מס' 8 (20%)

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2}$$

נתונה הפונקציה

- א. (15%) ציירו את גרף הפונקציה ומצאו אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון.
- ב. (5%) מצאו את כל הערכים החיוביים של m שעבורם יש למשוואה $f(x) = mx$ פתרון חיובי אחד בלבד.

שאלה מס' 9 (20%)

- א. (10%) מצאו את מקדמי הפולינום: $p(x) = 2ax^6 + bx^5 + 3ax^4 - 2bx^3 + cx^2 + dx + e$, אם נתון:
1. הפולינום הנתון מתחלק ב- $x^2(x-1)$ ללא שארית.
 2. לאחר חלוקתו של הפולינום ב- $(x+1)$ מתקבלת שארית 2.
 3. המשיק לגרף הפולינום בנקודה שבה $x=1$ מקביל לציר ה- x .
- ב. (10%) מקבוצה שבה 8 תלמידים מכיתה י"א ו-4 תלמידים מכיתה י"ב, בוחרים משלחת בת 5 תלמידים. בכמה אופנים ניתן לבצע זאת בתנאים הבאים:
1. אחד מהם משמש כיושב ראש ואחד אחר משמש כסגנו. יושב הראש והסגן לא יכולים להיות מאותה הכיתה.
 2. שאר חברי המשלחת שנבחרו ושאינם יו"ר או סגן אינם יכולים כולם להיות מאותה הכיתה.

בהצלחה!

① $\cos X + \sqrt{1.5 - \cos^2 X} - \cos X \sqrt{1.5 - \cos^2 X} = 1$

$1.5 - \cos^2 X \geq 0$

$1.5 \geq \cos^2 X$

$X \in \mathbb{R}$

$\sqrt{1.5 - \cos^2 X} (1 - \cos X) = (1 - \cos X)$

$\cos X - 1 = 0$

$\cos X = 1$

$X = 2\pi k$

$1.5 - \cos^2 X = 1$

$\cos^2 X = \frac{1}{2}$

$2\cos^2 X - 1 = 0$

$\cos 2X = 0$

$2X = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$X = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

② $\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \log_x \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2} \log_x x$

$(x-1) \left(\frac{2x}{|x-3|} - x \right) \leq 0$

$x(x-1) \left(\frac{2}{|x-3|} - 1 \right) \leq 0$

$x(x-1) \left(\frac{2-|x-3|}{|x-3|} \right) \leq 0$

$x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0$
 $x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$

$\frac{2x}{|x-3|} > 0$

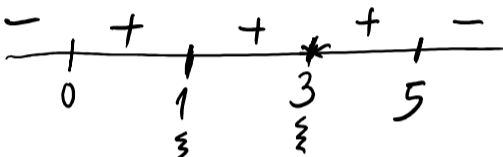
Sign chart: $\frac{-}{0} \frac{+}{3} \frac{+}{+}$

$x > 0$
 $x \neq 3$

סדר גודל

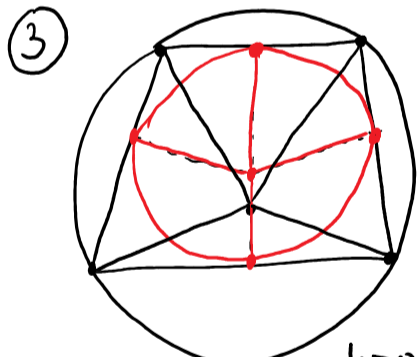
$x > 0$
 $x \neq 1, 3$

$x=0$
 $x=1$
 $x \neq 3$
 $2-|x-3| = 0$
 $2 = |x-3|$
 $(x-3)^2 = 4$
 $(x-3-2)(x-3+2) = 0$
 $(x-5)(x-1) = 0$
 $x=5 \quad x=1$

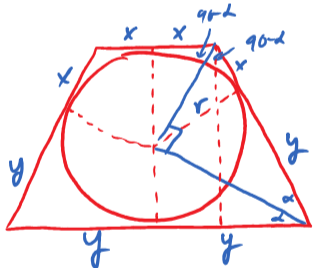


כל נשמה של ג.ת.ה.
סדר גודל נקודות:

$x \geq 5$



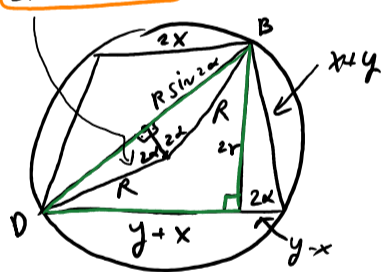
$\frac{R}{r} = k$
 $R = k \cdot r$



$r^2 = x \cdot y$
 $\sin 2\alpha = \frac{2r}{x+y}$
 $x+y = \frac{2r}{\sin 2\alpha}$
 $(x+y)^2 = \frac{4r^2}{\sin^2 2\alpha}$

16

$BD = 2RS \sin 2\alpha$



$\sin^2 2\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2k^2} = \frac{1 + \sqrt{1+4k^2}}{2k^2}$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1+4k^2}}}{\sqrt{2} k}$

$k = \sqrt{20}$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1+80}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow 2\alpha = 30$

33 של כוונת
מחוקק גודל
גודל

סדר גודל נקודות
 $k \geq \sqrt{2}$

$0 < \sin^2 2\alpha \leq 1$

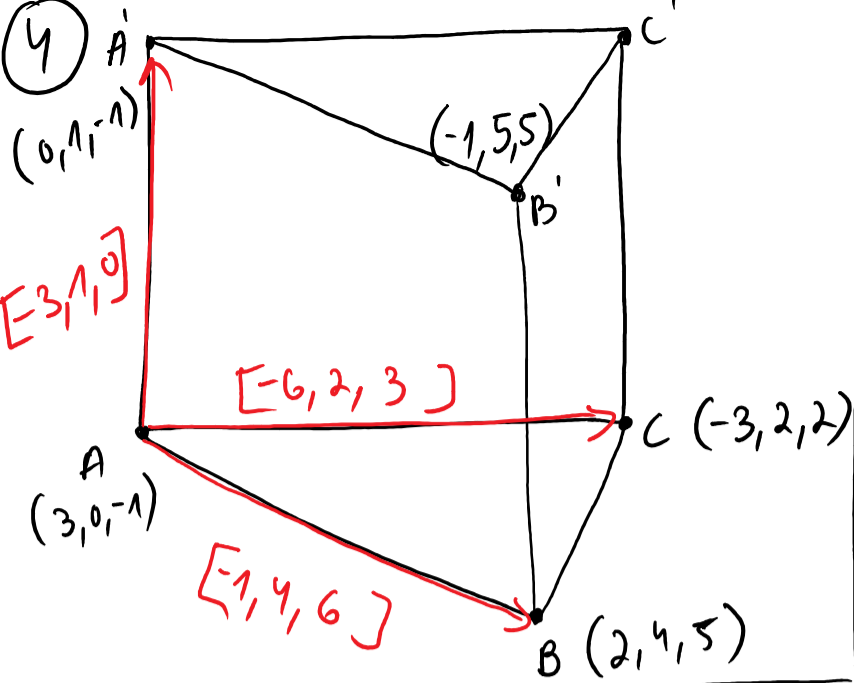
$0 < \frac{1 + \sqrt{1+4k^2}}{2k^2} \leq 1$

$1 + \sqrt{1+4k^2} \leq 2k^2$

$\sqrt{1+4k^2} \leq 2k^2 - 1$

$2k^2 - 1 > 0 \rightarrow k > \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $1 + 4k^2 \leq 4k^4 - 4k^2 + 1$
 $0 \leq 4k^4 - 8k^2 = k^2(4k^2 - 8)$
 $0 \leq k^2(k - \sqrt{2})(k + \sqrt{2})$

Sign chart: $\frac{+}{-\sqrt{2}} \frac{-}{0} \frac{+}{\sqrt{2}}$



| A | B | C |
|----|---|---|
| -6 | 2 | 3 |
| -1 | 4 | 6 |

$\vec{n}(0, 33, -22)$
 $\vec{n}(0, 3, -2)$

(k)

$$0x + 3y - 2z + b = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $2 \quad 4 \quad 5$
 $6 + 12 - 10 + b = 0$
 $b = -2$
 $3y - 2z - 2 = 0$

(z)

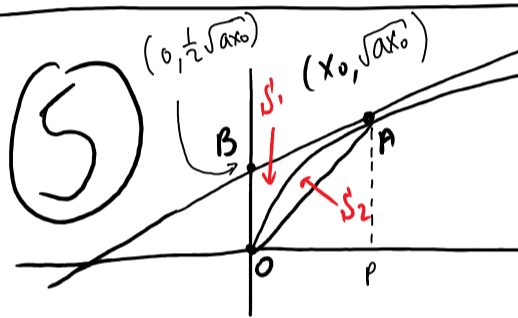
$$V = \frac{(\vec{AC} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AA'}}{2} = \frac{(0, 33, -22) \cdot (-3, 1, 0)}{2}$$

$$M\left(\frac{3-3+2}{3}, \frac{0+2+4}{3}, \frac{-1+2+5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 2\right)$$

$$V = \frac{33}{2}$$

$$\vec{BM} = \left[\frac{2}{3} + 1, 2 - 5, 2 - 5\right] = \left[\frac{5}{3}, -3, -3\right] \quad B'(-1, 5, 5)$$

$$\sin \alpha = \frac{(5, -9, -9) \cdot (0, 3, -2)}{|(5, -9, -9)| |(0, 3, -2)|} = \frac{-27 + 18}{\sqrt{25+81+81} \sqrt{0+9+4}} = \frac{9}{\sqrt{187} \sqrt{13}}$$



$y = \sqrt{ax} \quad a > 0$
 $y' = \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x_0}}$
 $y - y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x_0}} (x - x_0)$
 $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x_0}} \cdot (-x_0) + y_0$
 $y = -\frac{1}{2} \sqrt{ax_0} + \sqrt{ax_0} = \frac{1}{2} \sqrt{ax_0}$

(?)

$$S_1 = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{12} \sqrt{a} X_0^{1.5}$$

$$a = 9 \Rightarrow 2 = \frac{1}{4} X_0^{1.5}$$

$$8 = X_0^{1.5}$$

$$X_0 = 4 \Rightarrow (4, 6)$$

$$y_0 = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$$

$$S_{DBAO} = \frac{1}{2} X_0 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{ax_0} = \frac{1}{4} \sqrt{a} X_0^{1.5}$$

$$S_{DAPO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{ax_0} \cdot X_0 = \frac{1}{2} \sqrt{a} \cdot X_0^{1.5}$$

$$\int_0^{x_0} (ax)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(ax)^{1.5}}{1.5a} \Big|_0^{x_0} = \frac{(ax_0)^{1.5}}{1.5a} = \frac{2}{3} \sqrt{a} X_0^{1.5}$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \sqrt{a} \cdot X_0^{1.5} - \frac{1}{2} \sqrt{a} X_0^{1.5} = \frac{1}{6} \sqrt{a} X_0^{1.5}$$

$$S_1 = \frac{1}{4} \sqrt{a} X_0^{1.5} - \frac{1}{6} \sqrt{a} X_0^{1.5} = \frac{1}{12} \sqrt{a} X_0^{1.5}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = 2$$

6 (k)

$$\frac{7^m - 2^{2n}}{33} = pfe$$

$\frac{7^{n+2} - 2^{2m+4}}{33} = \frac{49 \cdot 7^m - 16 \cdot 2^{2n}}{33} = \frac{16(7^m - 2^{2n})}{33} + \frac{33 \cdot 7^m}{33} = pfe$
 (מחלקים) (מכפילים)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = pfe$$

תכונה יקראת

$$n = 2k \Rightarrow \frac{7^{2k} - 2^{4k}}{33} = \frac{(7^2)^k - (2^4)^k}{33} = \frac{(49)^k - 16^k}{49 - 16} = pfe$$

f.c.N

⑥ $2+i, 1+3i, -2+4i$

① $q = \frac{1+3i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+5i+3}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

② $a_0 = a_2 \cdot q^{-1} = (1+3i) \cdot (1+i)^{-1} = (1+3i) \cdot \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = (1+3i)(1-i) = -4-12i$

③ $S = 63+34i = \frac{(2+i)((1+i)^n - 1)}{1+i-1}$

$\frac{(63+34i) \cdot i}{2+i} + 1 = (1+i)^n$

$(63+34i) \cdot \frac{i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + 1 =$

$(63+34i) \left(\frac{2i+1}{5} \right) + 1 =$

$\frac{126i+63-68+34i}{5} + 1 =$

$\frac{-5+160i}{5} + 1 = -1+32i+1 = 32i$

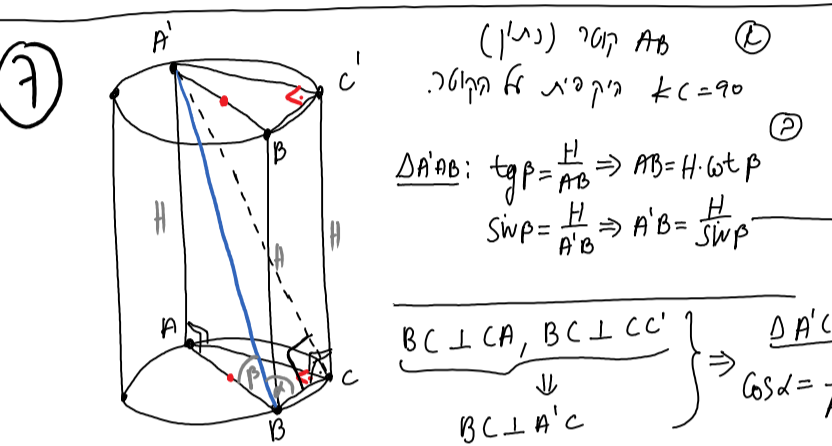
$32i = (1+i)^n$

$32 \text{cis } 90 = (\sqrt{2} \text{cis } 45)^n$

$32 \text{cis } 90 = (\sqrt{2})^n \text{cis } 45n$

$32 = \sqrt{2}^n \quad 90 = 45n + 360k$

$n=10 \quad 90 = 450 + 360k$



$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$AC^2 = H^2 \cdot \cot^2 \beta - \frac{H^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$

$AC^2 = \frac{H^2 (\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \beta}$

$V = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{H \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} \cdot H$

$Ae = \frac{H}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}$

$V = \frac{1}{2} \frac{H^3 \cos \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}$

⑧ $y = \frac{x^3}{x-2} \quad (x \neq 2)$

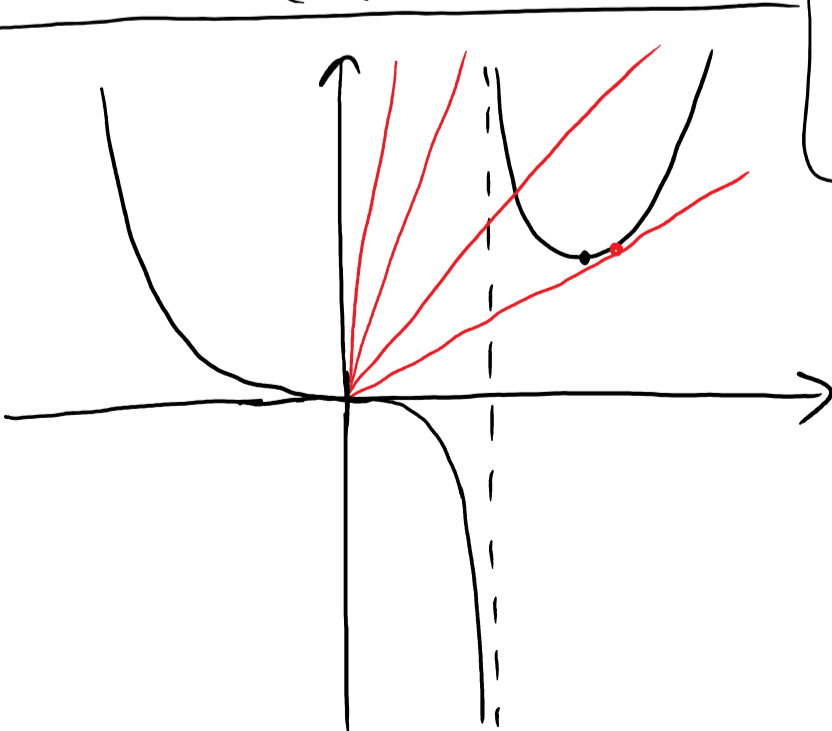
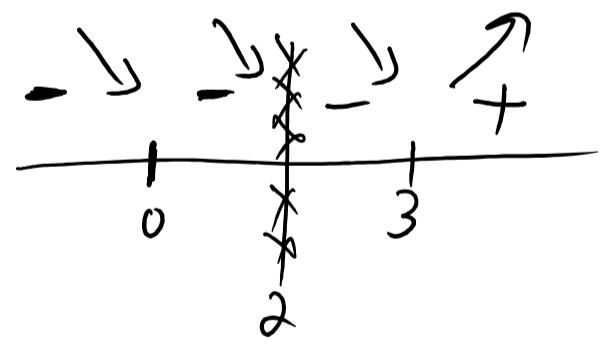
$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = \infty$

$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{F(x)}{x} = \infty$

$x=2$ אסימטוטה אנכית
 $x=3$ אסימטוטה אופקית

$(0,0)$

$y' = \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$



$(3, 27)$ Min
 $(0, 0)$ אסימטוטה

$x > 3$ \nearrow (הפך)
 $x < 2, 2 < x < 3$ \searrow (הפך)

$m(x-2) = x^2$

$x^2 - mx + 2m = 0$

$\Delta = 0 \quad m^2 - 8m = 0$

$m(m-8) = 0$

$m = 8$

9/16

$$p(x) = 2ax^6 + bx^5 + 3ax^4 - 2bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$p'(x) = 12ax^5 + 5bx^4 + 12ax^3 - 6bx^2 + 2cx + d$$

$$p(0) = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$p(1) = 0 \rightarrow 2a + b + 3a - 2b + c = 0$$

$$p'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$p'(-1) = 2 \rightarrow 2a - b + 3a + 2b + c = 2$$

$$p'(1) = 0 \rightarrow 12a + 5b + 12a - 6b + 2c = 0$$

$$\begin{cases} 5a - b + c = 0 \\ 5a + b + c = 2 \end{cases} \rightarrow 2b = 2 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\begin{cases} 24a - b + 2c = 0 \\ 24a + 2c = 1 \\ 5a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24a + 2c = 1 \\ 10a + 2c = 2 \end{cases} \rightarrow 14a = -1 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{14}}$$

$$-\frac{5}{14} + c = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{19}{14}}$$

9
2

5 הנותנים $\begin{cases} 11\bar{c}, 8 \\ 2\bar{c}, 4 \end{cases}$

$$\frac{11}{7} \mid \frac{120}{7} \mid \frac{1,2}{2,1}$$

$$8 \cdot 4 \cdot \left[C_7^1 C_3^2 + C_7^2 C_3^1 \right] \cdot 2$$

$$32 (7 \cdot 3 + 21 \cdot 3) \cdot 2 = \boxed{5376}$$