מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים.
מותר להשתמש במחשבון.

14.7.16

מבחן בגרות במתמטיקה

משך המבחן 3.5 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

פתרו 2 מהשאלות 1-3, 2 מהשאלות 4-6 ו- 2 מהשאלות 7-9!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - מחייבת הוכחה!

כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ואינו מופיע ברשימת המשפטים - מחייב הוכחה!

שאלה 1 (15%)

מצאו עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $(m-1)x-(3m+2)\sqrt{x}+2m-1=0$ פתרון ממשי אחד בלבד.

שאלה 2 (15%)

שני מעגלים משיקים מבפנים זה לזה בנקודה A. מעבירים במעגל החיצוני קוטר AB. B על המעגל הגדול.
מנקודה B מעבירים ישר המשיק למעגל הפנימי בנקודה D וחותך את המעגל החיצוני בנקודה C.
נסמן: O מרכז המעגל הקטן, R רדיוס המעגל הגדול ו- r רדיוס המעגל הקטן. נתון כי $R=4$.

5% א. הוכיחו כי $AC=\frac{8r}{8-r}$.

10% ב. בטאו את שטח המשולש BOC על ידי r.

שאלה 3 (15%)

בחרוט מעגלי ישר נתון כי קוטר הבסיס AB מונח על הישר: $\frac{x-10}{4}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z+2}{-3}$.

הקו היוצר SA של החרוט (S קדקוד החרוט) מונח על הישר: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+7}{m}=\frac{z+1}{-5}$,

ו- $M(-2,-1,7)$ הוא מרכז המעגל של בסיס החרוט.

5% א. מצאו את הפרמטר m.

5% ב. מצאו את משוואת המישור המכיל את הנקודות A, B, S.

5% ג. מצאו את שיעורי הנקודה B.

* * * * * * * * * * * * * * * *

שאלה 4 (20%)

נתונה פונקציה $f(x)=\frac{mx+n}{x^2-9x+18}$.

5% א. מצאו את m ו- n אם נתון שהנקודה $(4,-1)$ היא נקודת קיצון שלה.

7% ב. שרטטו את גרף הפונקציה כאשר $n=-2$, $m=1$. ציינו אסימפטוטות, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון.

8% ג. נגדיר פונקציה $g(x)=3f(x-3)+3$ בתחום $6<x<9$. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$.

שאלה 5 (20%)

בכדור בעל רדיוס R חסומה פירמידה ישרה שבסיסה מלבן. הזווית בין אלכסוני המלבן היא α. כל המקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצרים זווית β עם בסיסה. חשבו את נפח הפירמידה. **נמקו כל שלב.**

שאלה 6 (20%)

בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{2^{\lg\left(10-3^x\right)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n$ ידוע שהמקדמים הבינומיאליים של האיברים השני, השלישי והרביעי הם האיברים הראשון השלישי והחמישי של סדרה חשבונית.

10% א. מצאו את n.

10% ב. עבור איזה ערך של x האיבר השישי בפיתוח של הבינום שווה ל- 21 ?

שימו לב : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

* * * * * * * * * * * * * * * *

שאלה 7 (15%)

נתונה משוואה $z^4+2z^3-z^2-2z+10=0$

6% א. הוכיחו כי אם $z=a-bi$ הוא פתרון המשוואה אז גם $z=a+bi$ הוא פתרון שלה.

9% ב. פתרו את המשוואה אם ידוע ש- $z=-2-i$ הוא אחד מפתרונותיה.

שאלה 8 (15%)

פתרו את האי-שיוויון $\operatorname{tg} x-5\operatorname{tg}\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)\ge 6\sin\frac{17\pi}{2}$ בתחום $0<x<\pi$.

שאלה 9 (15%)

5% א. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים : $\frac{(n!)^2}{(2n)!}\le\frac{n+1}{4^n}$.

5% ב. כמה מספרי טלפון שונים בני שש ספרות ניתן לבנות מהספרות $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$?

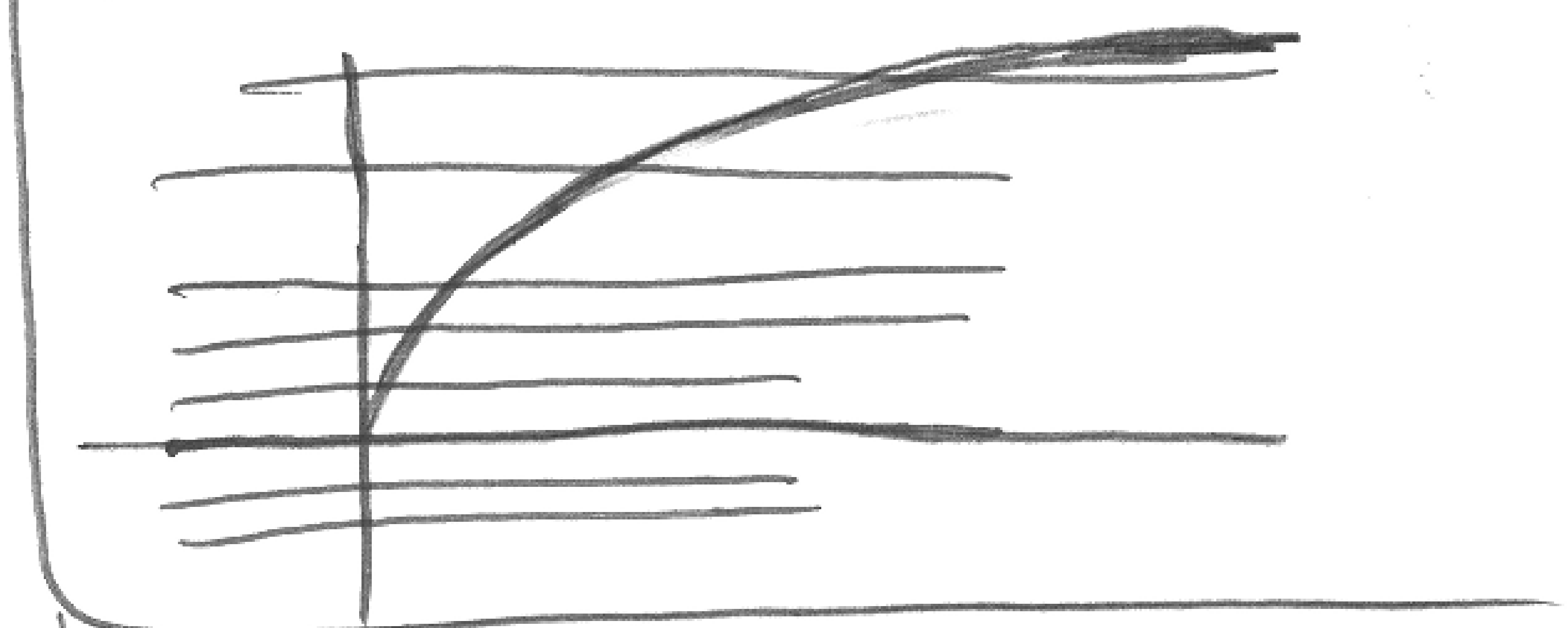
5% ג. כמה מספרי טלפון שונים בני שש ספרות שונות ניתן לבנות מהספרות $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$, כך שיכילו את הספרות $1,4,6$ בסדר זה, אך לא בהכרח צמודות זו לזו?

בהצלחה!

$(m-1)t^2-(3m+2)t+2m-1=0$

1) $(m-1)x-(3m+2)\sqrt{x}+2m-1=0$

$\sqrt{x}=t\geq 0$



$t_1<0$

$t_2\geq 0$

$\frac{c}{a}\leq 0$

$\frac{2m-1}{m-1}<0$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{1}{2} \quad 1$

$\boxed{\frac{1}{2}\leq m<1}$

$t_1=t_2\geq 0$

$\Delta=0$

$(3m+2)^2-4(m-1)(2m-1)=0$

$9m^2+12m+4-8m^2+12m-4=0$

$m^2+24m=0$

$m(m+24)=0$

$m=0$

$-t^2-2t-1=0$

$(t+1)^2=0$

$t=-1$

$\emptyset$

$\boxed{m=-24}$

$-25t^2+70t-49=0$

$25t^2-70t+49=0$

$(5t-7)^2=0$

$t=\frac{7}{5}$ ✓

$t\geq 0$

$a=0$

$\boxed{m=1}$

$-5t+1=0$

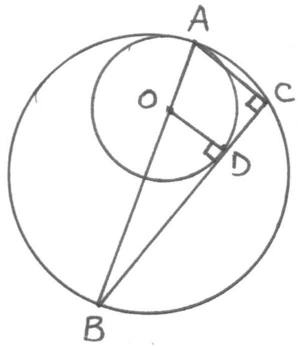
$t=\frac{1}{5}$ ✓

$\frac{1}{2}\leq m\leq 1$

$m=-24$

הדס

פתרון שאלה 2 בבגרות 14.7.16



א) קטע המרכזים בין מעגלים משיקים ונקודת ההשקה נמצאים על ישר אחד

לכן $O \in AB$.

נזכיר $OD \perp BC$ (רדיוס המאונך למשיק למעגל בנקודת ההשקה).

$\angle ACB = 90^\circ$ (זווית היקפית השווה לחצי הקשת $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$)

נתון: $OD = OA = r$; $AB = 8$.

$OD \parallel AC$ (לפי זווית מתאימות שוות $90^\circ = \angle ODB = \angle ACB$)

לכן לפי משפט תלס: $\frac{OD}{AC} = \frac{OB}{AB}$

$$\Leftarrow \quad \frac{r}{AC} = \frac{8-r}{8} \qquad (OB = AB - AO = 8-r)$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{AC = \frac{8r}{8-r}}$$

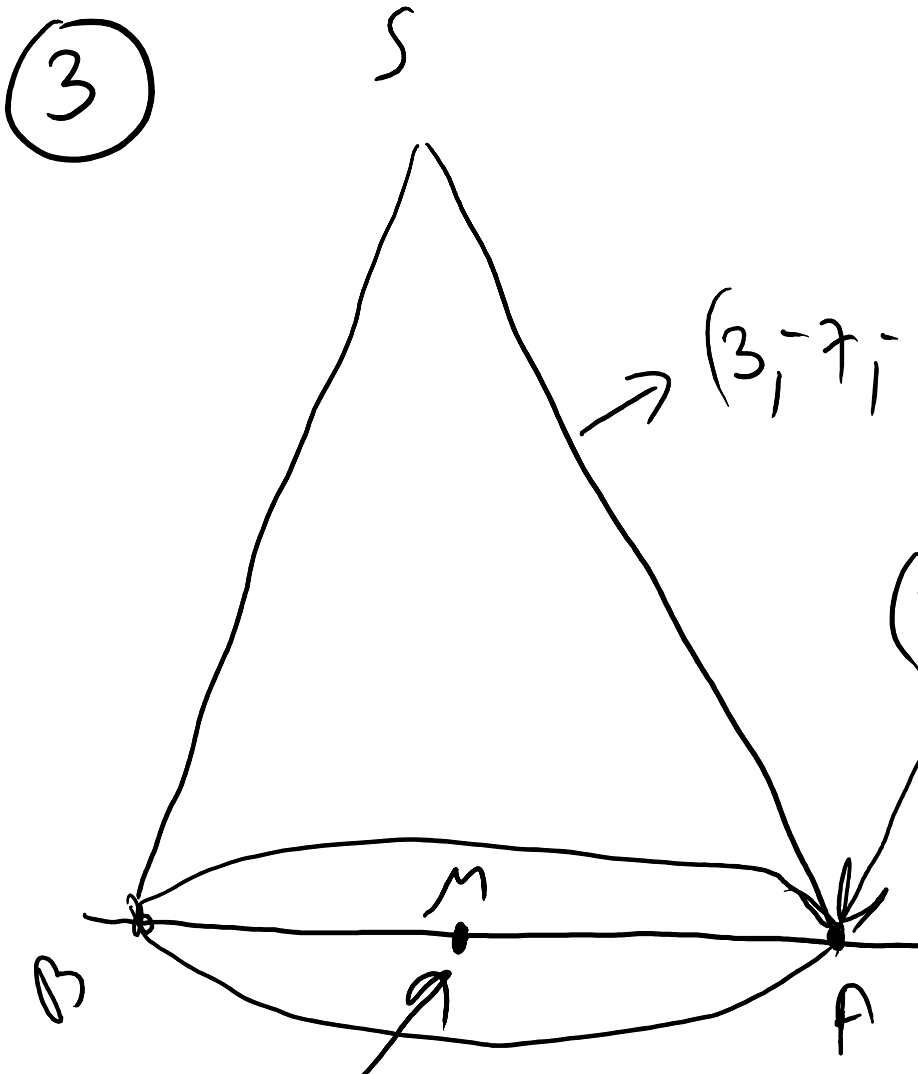
ב) לפי משפט פיתגורס ב $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 8^2 - \left(\frac{8r}{8-r}\right)^2 = 8^2\left(1 - \frac{r^2}{(8-r)^2}\right)$$

$$BC = 8\sqrt{\frac{(8-r)^2 - r^2}{(8-r)^2}} = \frac{8}{8-r}\sqrt{64-16r} = \frac{32}{8-r}\sqrt{4-r}$$

$$S(\triangle BOC) = \frac{BC \cdot OD}{2} = \frac{\frac{32}{8-r}\sqrt{4-r} \cdot r}{2} = \boxed{\frac{16r}{8-r}\sqrt{4-r}}$$

③



$(3,-7,-1)+k(1,m,-5)$

$(3+k,-7+mk,-1-5k)$

$(10,-7,-2)+t(4,-2,-3)$

$(-2,-1,7)$

$$\overbrace{(3+k+2,-7+mk+1,-1-5k-7)}^{\overline{AM}}=w(4,-2,-3)$$

$$5+k=4w \Rightarrow k=4w-5$$
$$mk-6=-2w$$
$$-8-5k=-3w \Rightarrow -8-20w+25=-3w$$
$$17=17w$$
$$\boxed{\begin{matrix} w=1 \\ k=-1 \end{matrix}}$$

$$m(-1)-6=-2$$
$$\boxed{-4=m}$$

$(2,-3,4)$

$(-2,-1,7)$

A	B	C
4	-2	-3
1	-4	-5

$\vec{n}(-2,17,-14)$

$$-2x+17y-14z+D=0$$
$$D=111$$
$$\boxed{-2x+17y-14z+111=0}$$

משוואה אלגברית

$$\boxed{(-6,1,10)}$$

② π_{ABS}: $\boxed{(10,-7,-2)+r(4,-2,-3)+w(1,-4,-5)}$

משוואה פרמטרית

4

ב

$$y=\frac{mx+n}{x^2-9x+18}$$

קיצון $(4,-1)$

$$y'=\frac{m(x^2-9x+18)-(2x-9)(mx+n)}{(x^2-9x+18)^2}=0$$

$$\frac{m(-2)-(-1)(4m+n)}{4}=0$$

$$-2m+4m+n=0$$

$$-2m=n$$

$$-1=\frac{4m+n}{-2}$$

$$2=4m+\underset{\uparrow\,-2m}{n}$$

$$2=2m$$

$m=1$ $n=-2$

ג

$$y=\frac{x-2}{x^2-9x+18}$$

$$x^2-9x+18\neq 0$$

$$(x-3)(x-6)\neq 0$$

$x\neq 3$ $x\neq 6$

$x=0$

$(0,-\frac{1}{9})$

$y=0$

$(2,0)$

אסימפטוטות

$x=3$

$x=6$

$y=0$

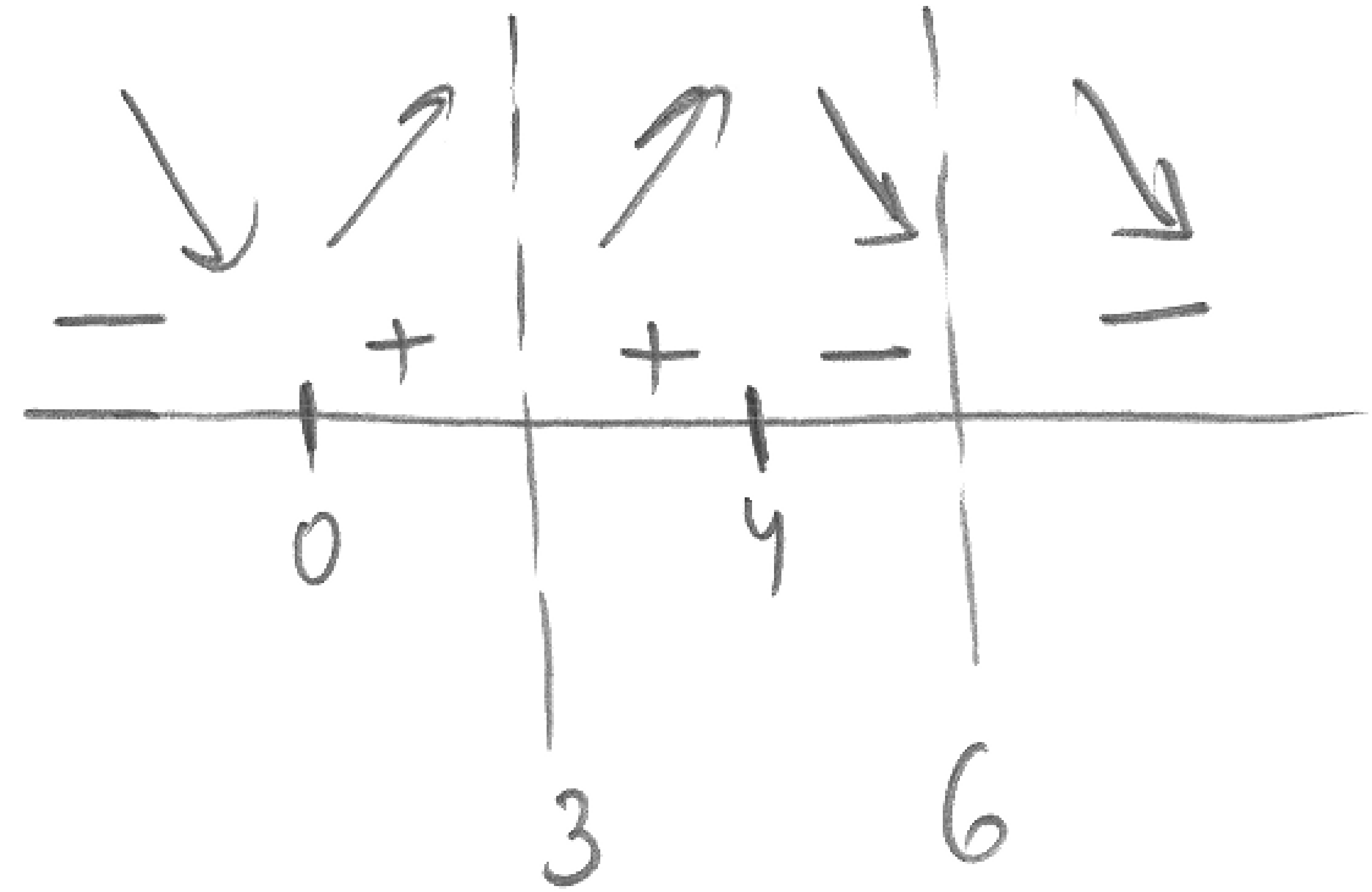
$$y' = \frac{1(x^2-9x+18)-(2x-9)(x-2)}{(\ )^2} = 0$$

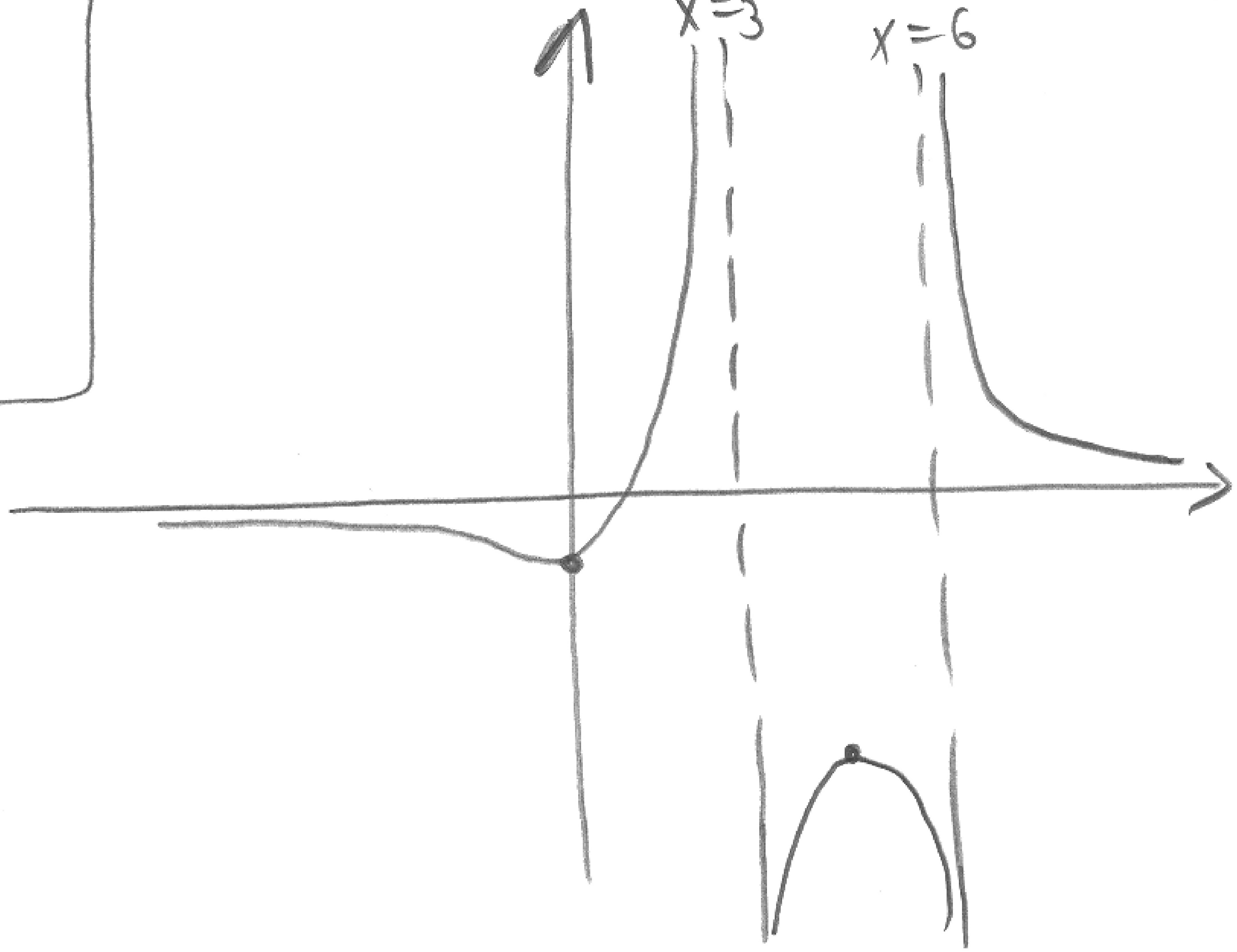
$$x^2 \cancel{-9x} + 18 - 2x^2 + 4x \cancel{+9x} - 18 = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$x = 0$	$x = 4$
$(0, -\frac{1}{9})$	$(4, -1)$





ד

הכל זז ב-3 ימינה | כל ערך של y מוכפל ב-3 ועולה ב-3

$$g(x) = 3F(x-3) + 3$$

$$3 \cdot \left(\frac{(x-3) - 2}{(x-3)^2 - 9(x-3) + 18} \right) + 3$$

$6 < x < 9$

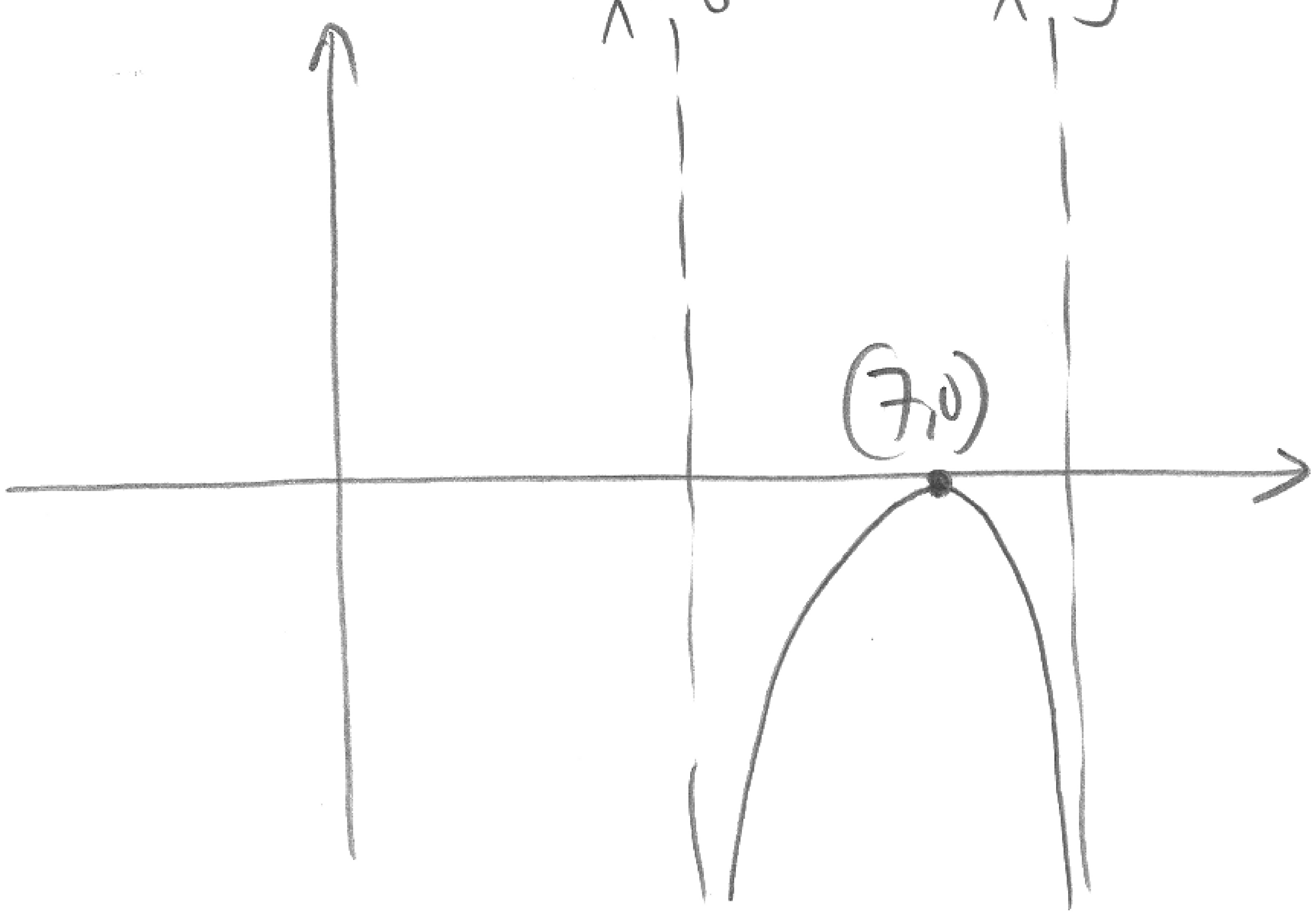
אסימפטוטה $(6, \ )$

אסימפטוטה $(9 \ )$

$(4,-1)$

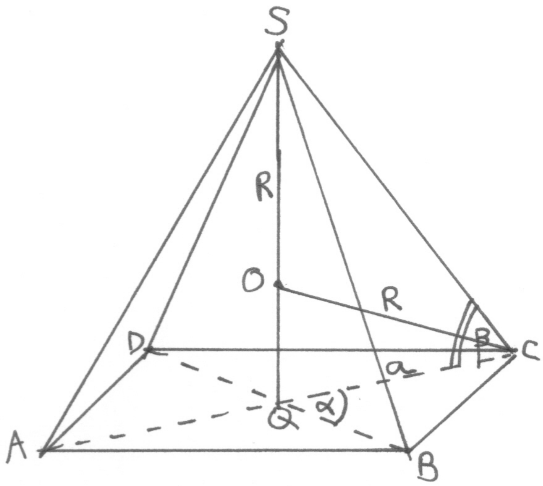
$\Downarrow$

$(7,0)$

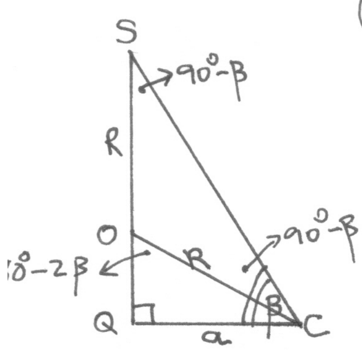


הדס

פתרון שאלה 5 בבגרות 14.7.16



נסמן: SABCD הפרמידה הישרה
Q מפגש אלכסוני המלבן
$\alpha = \angle CQB$ (נתון)
$SQ \perp ABCD$ (בפרמידה ישרה
הגובה נופל במרכז המעגל החוסם
את הבסיס, ובמלבן זה מפגש האלכסונים)
O מרכז הכדור החוסם
$O \in SQ$ (בפרמידה ישרה מרכז הכדור החוסם נמצא על הגובה)
$\beta = \angle SCQ$ (הזווית הנתונה היא בין המקצוע הצדדי SC לבין היטלו על הבסיס CQ)
נסמן גם $a = CQ$ (חצי אלכסון המלבן)



חישובים:

$OS = OC = R$ (רדיוסים של הכדור החוסם)

$\angle CSQ = 90° - \beta$ ($\triangle CSQ$)

$\angle CSQ = \angle SCQ = 90° - \beta$ ($\triangle SOC$ משו"ש)

$\Rightarrow \angle QOC = 180° - 2\beta$ (חיצונית ל $\triangle SOC$)

$\sin(180° - 2\beta) = \frac{a}{R}$ ($\triangle QOC$) $\Rightarrow$ $a = R \cdot \sin 2\beta$

$\tan\beta = \frac{SQ}{a}$ ($\triangle SCQ$) $\Rightarrow$ $SQ = a\tan\beta = R\sin 2\beta \cdot \tan\beta$

$$= R \cdot 2\sin\beta\cos\beta \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = 2R\sin^2\beta$$

$$S(ABCD) = \frac{2a \cdot 2a \cdot \sin\alpha}{2} = 2a^2\sin\alpha = 2R^2\sin^2 2\beta \cdot \sin\alpha$$

$$V(SABCD) = \frac{S(ABCD) \cdot SQ}{3} = \frac{2R^2\sin^2 2\beta \cdot \sin\alpha \cdot 2R\sin^2\beta}{3} =$$

$$\boxed{= \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta \cdot \sin^2\beta \cdot \sin\alpha}$$

6

C_n^1, C_n^2, C_n^3

$a_1 \quad a_3 \quad a_5$

$$2 \cdot C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot n!}{\cancel{2}!(n-2)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$(n-1)n = n + \frac{\overbrace{(n-2)(n-1)}^{n^2-3n+2} \cdot n}{6}$$

$$6n^2 - 6n = 6n = n^3 - 3n^2 + 2n$$

$$n^3 - 9n^2 + 14n$$

$$n(n-2)(n-7) = 0$$

$$\boxed{n=7}$$

$$C_7^5 \left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^2 \cdot \left(\left(2^{\log_3(x-2)}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 21$$

$$21 \cdot 2^{\log(10-3^x)} \cdot 2^{\log 3(x-2)} = 21$$

$$2^{\log(10-3^x) + \log 3 \cdot (x-2)} = 1 = 2^0$$

$$\log(10-3^x) + (x-2)\log 3 = 0$$

$$\log\left((10-3^x)(3^{x-2})\right) = 0 = \log_{10} 1$$

$$(10-3^x)\left(\frac{3^x}{9}\right) = 1$$

$$t(10-t) = 9$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = 9 \quad t = 1$$

$3^x = 1$

$$\boxed{x=0}$$

$3^x = 9$

$$\boxed{x=2}$$

(ι) (7)

$1z^4+2z^3-z^2-2z+10=0$

$\overline{z^4+2z^3-z^2-2z+10}=\overline{0}$

$\overline{z^4}+\overline{2z^3}-\overline{z^2}-\overline{2z}+\overline{10}=0$

$\bar{z}^4+2\bar{z}^3-\bar{z}^2-2\bar{z}+10=0$

$\left(\overline{}\right)$

$\overline{z_1+z_2+\dots+z_n}=$
$\bar{z}_1+\bar{z}_2+\dots\bar{z}_n$

$\overline{z_1^n}=\bar{z}_1^n$

$\overline{k\cdot z_1}=k\cdot\bar{z}_1$

$\sqrt{}$ c.N

(7)

$z=-2-i$

$z=-2+i$

$z_1+z_2=-4$

$z_1\cdot z_2=5$

$z_1+z_2+z_3+z_4=-2$

$z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=10$

$z_3+z_4=2$

$z_3\cdot z_4=2$

$z^2-2z+2=0$

$1+i$	z_3
$1-i$	z_4

$-\frac{b}{a}$

$\frac{c}{a}$

$-\frac{d}{a}$

$\frac{e}{a}$

הדס

פתרון שאלה 8 בבגרות 14.7.16

ת"ח

$\sin x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$$\tan x - 5\tan\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \geq 6\sin\frac{17\pi}{2}$$

לפי מחזור 2π :

$$\tan x - 5\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 6\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\tan x + 5\cot x \geq 6$$

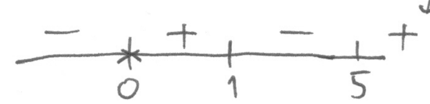
סימון $t = \tan x$

$$t + 5\cdot\frac{1}{t} \geq 6$$

$$\frac{t^2 - 6t + 5}{t} \geq 0$$

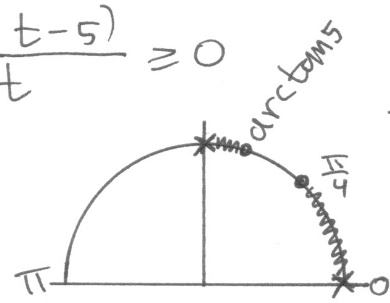
$t \neq 0$ $$\frac{(t-1)(t-5)}{t} \geq 0$$

בדיקת סימן ל-t גדול



$t > 5$ או $0 < t < 1$

לחזור ל $\tan x$:



$$\boxed{\arctan 5 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{או} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{4}}$$

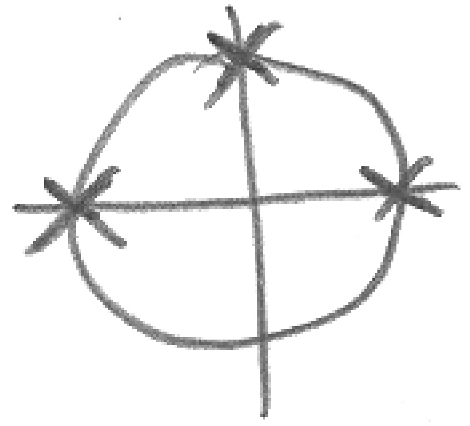
8

$tgx - 5tg(x-630) \geq 6\sin 1530$

$tgx - 5tg(x+90) \geqslant 6$

$\cos x \neq 0$

$\sin x \neq 0$



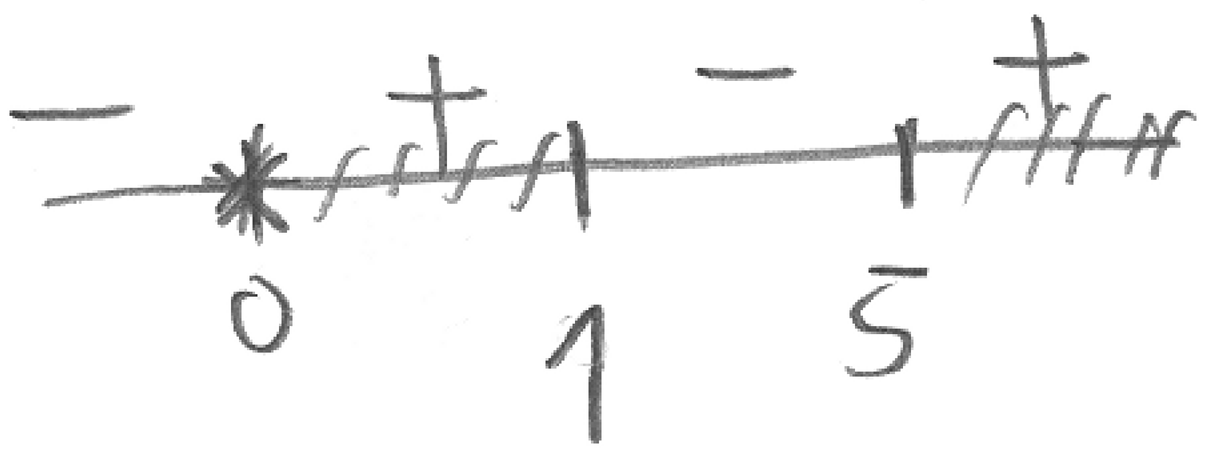
$tgx + 5\cot x \geqslant 6$

$tgx + \dfrac{5}{tgx} \geqslant 6$

$t + \dfrac{5}{t} - 6 \geqslant 0$

$\dfrac{t^2-6t+5}{t} \geqslant 0$

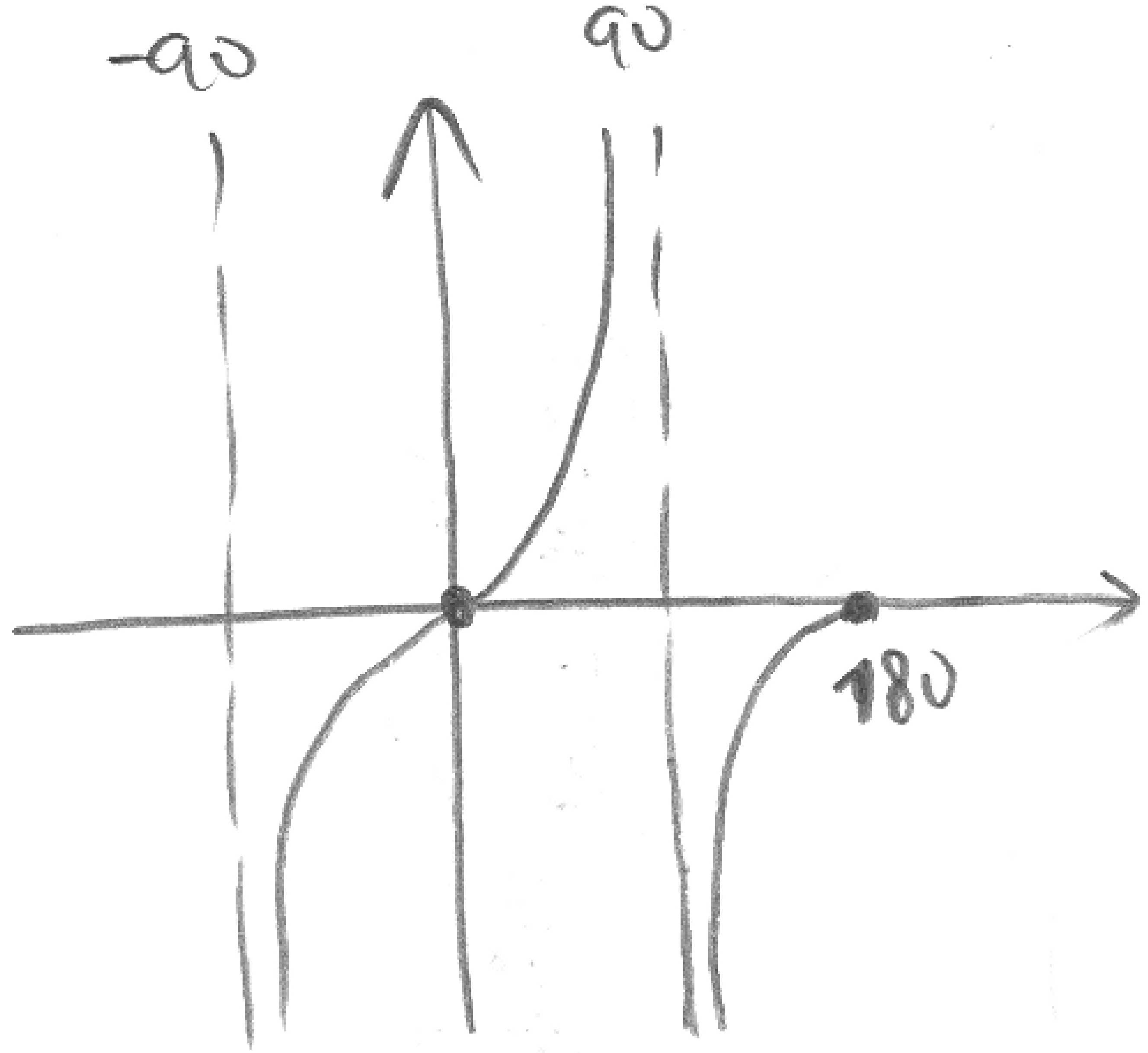
$\dfrac{(t-5)(t-1)}{t} \geqslant 0$



$tgx \geqslant 5 \Rightarrow$

$0 < tgx \leqslant 1$

$0 < x < 180$



arctg 5

$\boxed{\begin{array}{c} 78{,}69 \leq x < 90 \\ 0 < x \leq 45 \end{array}}$

9 c

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} < \frac{n+1}{4^n}$$

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} < \frac{n+2}{4^{n+1}}$$

$$\frac{n!^2(n+1)^2}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)} < \frac{n+2}{4^{n+1}}$$

$$\cancel{\frac{n+1}{4^n}}\ \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot 2\cancel{(n+1)}} < \frac{n+2}{\cancel{4^n}\cdot 4}$$

$$\frac{(n+1)^2}{2(2n+1)} < \frac{n+2}{4}$$

$$2(n+1)^2 < (2n+1)(n+2)$$

$$2(n^2+2n+1) < 2n^2+5n+2$$

$$2n^2+4n+2 < 2n^2+5n+2$$

$$4n+2 < 5n+2$$

$$4n < 5n$$

מ.ש.ל

9ב

מדובר במספרי טלפון אז כמובן שמותר
לאפס להיות בהתחלה.

ב

_ _ _ _ _ _

10 10 10 10 10 10

לכל מיקום אפשר לסדר
10 ספרות ולכן

$$\boxed{10^6}$$

ג

_ _ _ _ _ _ נשים את 1,4,6
ונבחר עוד 3 ספרות מתוך שבע שנותרו.
נסדר את הכל ואז נחלק בתמורות של 1,4,6

$$\boxed{\frac{C_7^3 \cdot 6!}{3!}} = \boxed{4200}$$

מונע את הפיזורים של 1,4,6