

מבחן גמר במתמטיקה מועד ב'

משך המבחן 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – מחייבת הוכחה!

פתרו אחת מהשאלות: 1 או 2**שאלה 1 (15%)**

- 10% א. נתונה פרבולה $y = mx^2 + nx$, $m < 0$, $n > 0$. בונים **משולש ישר זווית** OAB כך ש-O ראשית הצירים, A על הפרבולה ברביע הראשון, B על ציר x ונתון $\angle OBA = 90^\circ$. נתון גם כי המשולש הוא בעל שטח מקסימלי כאשר B היא הנקודה (2, 0) ושטח זה הוא 4.
מצאו את m ו-n.

5% ב. חשבו: $\int_{-1}^0 \frac{8x^3 - 2}{2x - 1} dx$

שאלה 2 (15%)

פתרו: $\frac{\lg(1 + \sqrt{x+1})}{\lg \sqrt[3]{x-10}} \geq 3$

* * *

שאלה 3 (15%) שאלת חובה!

במשולש ABC נתון כי $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $BC = a$. מעבירים מעגל המשיק ל-BC ומרכזו ב-A.

8% א. הוכיחו שרדיוס המעגל שווה ל- $\frac{a \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.

7% ב. בטאו את אורך הקשת של המעגל החסומה במשולש באמצעות a, β, γ .

* * *

שאלה 4 (20%) שאלת חובה!

נתונים שני ישרים: $l_1: \frac{x-7}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-3}$, $z=1$, $l_2: \frac{x-m-5}{1} = \frac{y-2}{2}$.

8% א. מצאו את m אם ידוע שהישרים מצטלבים.

6% ב. חשבו את קוסינוס הזווית בין הישרים המצטלבים.

6% ג. מצאו נקודה סימטרית לנקודה (3, -6, 1) ביחס לישר l_1 .

* * *

פתרו אחת מהשאלות: 5 או 6

שאלה 5 (15%)

פתרו: $\cos^2 x - 2 \sin 2x - 5 \sin^2 x \leq 0$. תנו פתרון כללי.

שאלה 6 (15%)

7% א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$6 \cdot 9 + 10 \cdot 27 + 14 \cdot 81 + \dots + (4n-2) \cdot 3^n = (2n-2) \cdot 3^{n+1}$$

8% ב. פתרו את המשוואה: $(1+i)z^2 - (3+i)z + 4i = 0$. רשמו את הפתרונות בצורה

טריגונומטרית.

* * *

שאלה 7 (15%) שאלת חובה!

הבסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש ישר זווית ABC שאורכי ניצביו $AC = BC = 4$. האלכסון CA' בפאה $CAA'C'$ יוצר זווית בת 30° עם הפאה $ABB'A'$. חשבו את נפח המנסרה. נמקו כל שלב בעזרת משפטים מתאימים. חישוב בלבד לא יתקבל.

* * *

פתרו אחת מהשאלות: 8 או 9

שאלה 8 (20%)

נתונה פונקציה $f(x) = \frac{x^2 + ax}{bx + 1}$

6% א. מצאו את הפרמטרים a ו- b אם נתון שמשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 0)$ מאונך

$$\text{לישר } 8x + 2y = 7.$$

14% ב. שרטטו את גרף הפונקציה כאשר $a = -1$, $b = 3$ וציינו אסימפטוטות, נקודות חיתוך

עם הצירים, תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון.

שאלה 9 (20%)

12% א. מצאו את a, b, x_0 עבור הפולינום $p(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + ax + b$

אם ידוע ש- x_0 הוא שורש מריבוי 3 של $p(x)$ וידוע כי x_0 שלם זוגי.

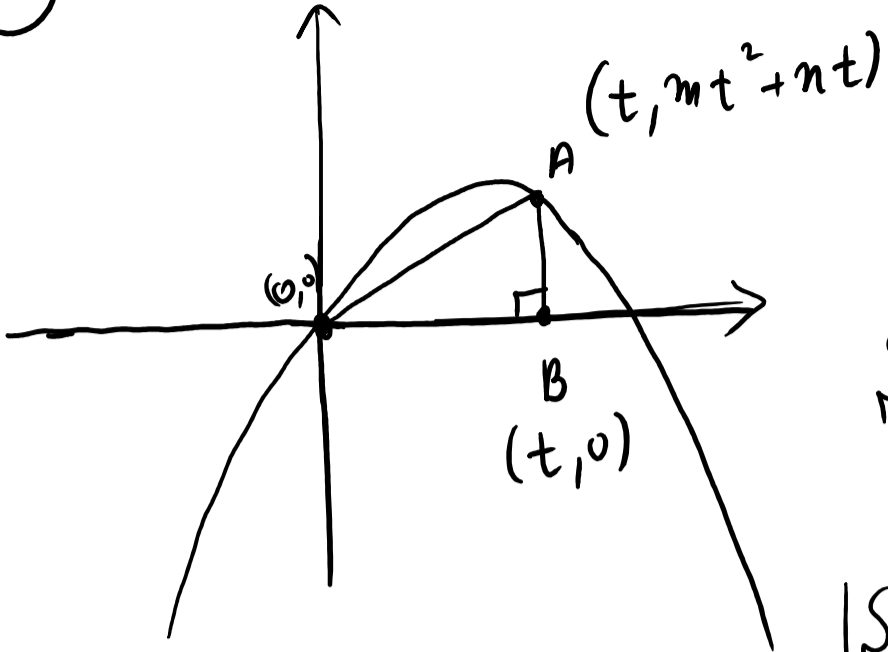
8% ב. בפיתוח של הבינום $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[8]{x^3}} \right)^n$, מצאו את האיבר המכיל את $\frac{y^2}{x^3}$.

* * *

בהצלחה!

① $y = mx^2 + nx = x(mx+n)$ $n > 0$
 $x=0$ $x = -\frac{n}{m}$ $m < 0$

②



$S_{max} = 4$! Δ Δ Δ
 $B(2,0)$

$S_{OAB} = \frac{t \cdot (mt^2 + nt)}{2} = \frac{1}{2}(mt^3 + nt^2)$

$S' = \frac{1}{2}(3mt^2 + 2nt) = 0$
 $t(3mt + 2n) = 0$
 $t \neq 0 \Rightarrow t = -\frac{2n}{3m}$ MAX

$S'' = 6mt + 2n$

$S''(-\frac{2n}{3m}) = \frac{-6m \cdot 2n}{3m} + 2n = -4n + 2n = -2n \Rightarrow$ 'if $n > 0$

$B(2,0) = (-\frac{2n}{3m}, 0)$

$2 = -\frac{2n}{3m} \Rightarrow 3m = -n$
 $-3m = n$

$S = 4 = \frac{1}{2} \left(m \left(\frac{-8n^3}{27m^3} \right) + n \left(\frac{4n^2}{9m^2} \right) \right)$

$8 = \frac{-8n^3}{27m^2} + \frac{4n^3}{9m^2} \Rightarrow 8 = \frac{-8 \cdot (-27)m^3}{27m^2} + \frac{4(-27)m^3}{9m^2}$

$8 = 8m - 12m \Rightarrow 8 = -4m \Rightarrow -2 = m \Rightarrow n = 6$
 $y = -2x^2 + 6x$

② $\int_{-1}^0 \frac{8x^3 - 2}{2x - 1} dx = \int_{-1}^0 (4x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{2x-1}) dx$

$\frac{8x^3 - 1 - 1}{2x - 1}$
 $\frac{(2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 1}{2x-1} - \frac{1}{2x-1}$

$\left. \frac{4x^3}{3} + x^2 + x - \frac{\ln|2x-1|}{2} \right|_{-1}^0 =$

$\left(0 - \frac{\ln|-1|}{2} \right) - \left(-\frac{4}{3} + 1 - 1 - \frac{\ln|-3|}{2} \right) = 0 + \frac{4}{3} + \frac{\ln 3}{2}$

$$\textcircled{2} \frac{\log_{10}(1+\sqrt{x+1})}{\log_{10}(\sqrt[3]{x-10})} \geq 3$$

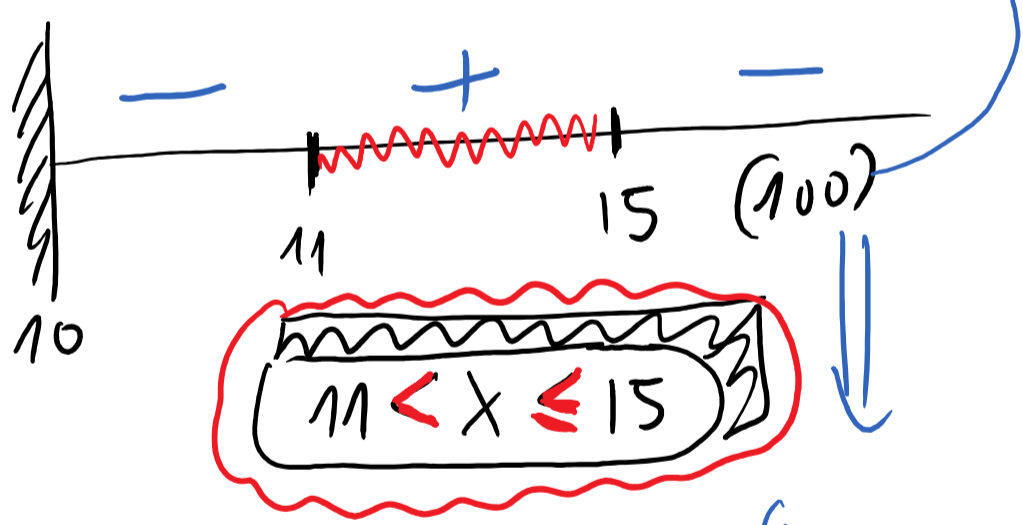
$$\frac{\log_{10}(1+\sqrt{x+1})}{3 \log_{10}(x-10)^{\frac{1}{3}}} \geq 1$$

$$\frac{\log_{10}(1+\sqrt{x+1})}{\log_{10}(x-10)} \geq 1$$

$$\log_{x-10}(1+\sqrt{x+1}) \geq \log_{x-10}(x-10)$$

$$(x-10-1)(1+\sqrt{x+1}-x+10) \geq 0$$

$$(x-11)(\sqrt{x+1}-x+11) \geq 0$$



$$(100-11) \underbrace{(1+\sqrt{101}-100+10)}_{\ominus} = \ominus$$

$$1+\sqrt{x+1} > 0 \quad \checkmark$$

$$x+1 \geq 0 \quad \boxed{x \geq -1}$$

$$\sqrt[3]{x-10} > 0$$

$$x-10 > 0 \quad \boxed{x > 10}$$

$$\log_{10}(\sqrt[3]{x-10}) \neq 0$$

$$10^0 \neq \sqrt[3]{x-10}$$

$$1 \neq \sqrt[3]{x-10}$$

$$1 \neq x-10$$

$$\boxed{11 \neq x}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x > 10 \\ x \neq 11 \end{matrix}}$$

התשובה

$$\sqrt{x+1} = -11+x$$

$$x+1 = 121 - 22x + x^2$$

$$0 = x^2 - 23x + 120$$

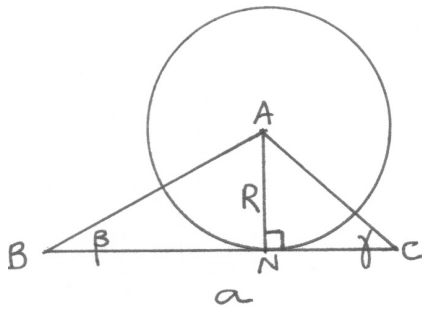
$$(x-15)(x-8) = 0$$

$$x=15 \quad x=8$$

פ'קטורציה פ'קטורציה

✓ פ'קטורציה

15.7.16 בערך 3 קטנות שנתר מ/זר ק' 15.7.16



(ק) (רד"ק) $AN \perp BC$ (רד"ס המאלק להשיק)
(דנק"ב ההשקה N)

$R = AN$, $(\Delta ABN) \sin \beta = \frac{R}{AB}$

$AB = \frac{R}{\sin \beta}$

$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \gamma}$

לפי משוואת סינוס ΔABC :

(חישוב הישול' ΔABC)

$\frac{a}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{\frac{R}{\sin \beta}}{\sin \gamma} \Leftarrow$

$R = \frac{a \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$

$\Leftarrow \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{R}{\sin \beta \sin \gamma}$

(ק) אורך הקטע הוא לפי הכולל המוכנה: $\alpha = \angle BAC = \pi - (\beta + \gamma)$

כק: $l = \alpha \cdot R$ אורך הקטע כאשר α קרוב'א' P

או קמטל' $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$ כאשר α קמטל'

$l = [\pi - (\beta + \gamma)] \cdot \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$
 $l = \frac{180^\circ - (\beta + \gamma)}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \quad //k$

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} l_1: \frac{x-7}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-3} \\ l_2: \frac{x-(m+5)}{1} = \frac{y-2}{2}, z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (7, 3, 1) + t(5, 2, -3) \\ (m+5, 2, 1) + k(1, 2, 0) \end{array}$$

$$\begin{cases} 7+5t = m+5+k \\ 3+2t = 2+2k \\ 1-3t = 1 \end{cases} \Rightarrow t=0 \Rightarrow 1=2k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

$$7+0 = m+5+\frac{1}{2} \Rightarrow m=1.5$$

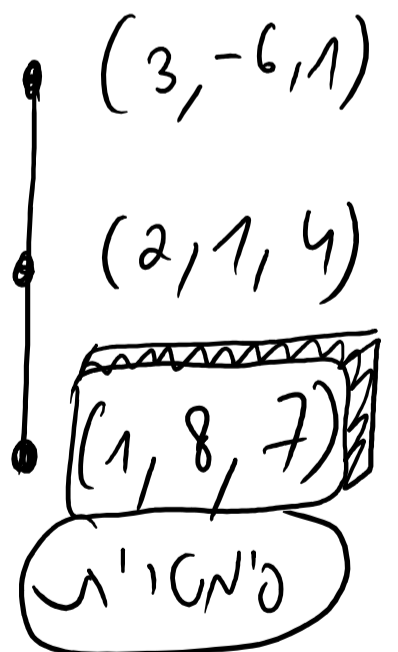
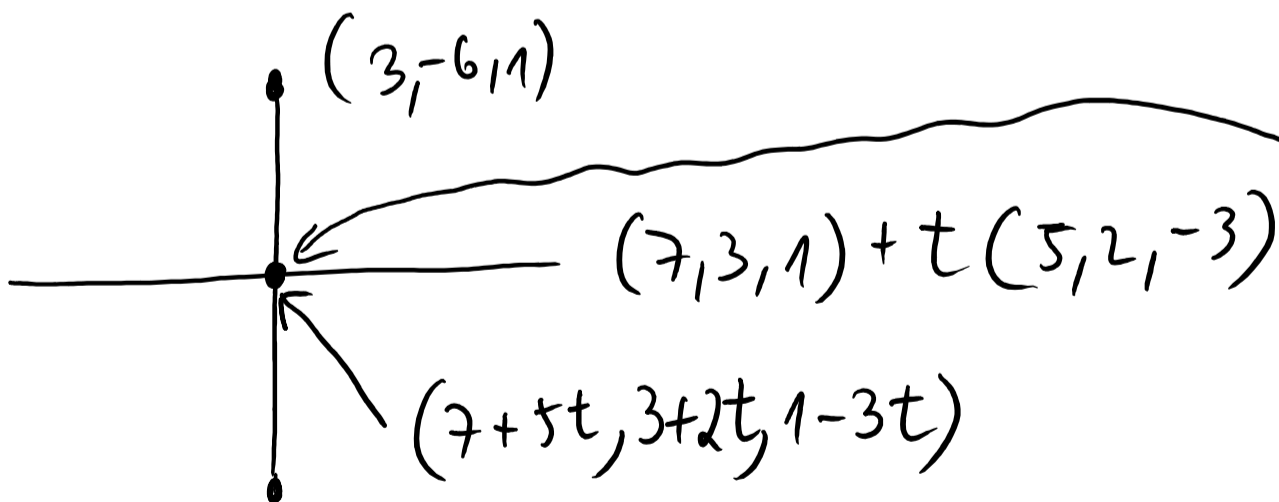
מכאן $m \neq 1.5$

$$\textcircled{2} \quad (5, 2, -3) \cdot (1, 2, 0) = |5, 2, -3| |1, 2, 0| \cdot \cos \alpha$$

$$5+4 = \sqrt{25+4+9} \sqrt{1+4+0} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{9}{\sqrt{38} \sqrt{5}} = \cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{190}}$$

$\textcircled{2}$



$$(7+5t-3, 3+2t+6, 1-3t-1) \cdot (5, 2, -3) = 0$$

$$(5t+4, t+9, -3t) \cdot (5, 2, -3) = 0$$

$$25t+20+4t+18+9t = 0$$

$$38t = -38 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow (2, 1, 4)$$

15.7.16 פתרון בעיה 5 במבחן במרץ/אפריל '16

$x \in \mathbb{R}$ ה'ה

$$\cos^2 x - 2 \cdot 2 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x \leq 0$$

קצ'נה עקור $\cos x = 0$
 $-5 \sin^2 x \leq 0$ ✓
 האילולן מקיים.

$$/: \cos^2 x$$

$$-5 \tan^2 x - 4 \tan x + 1 \leq 0$$

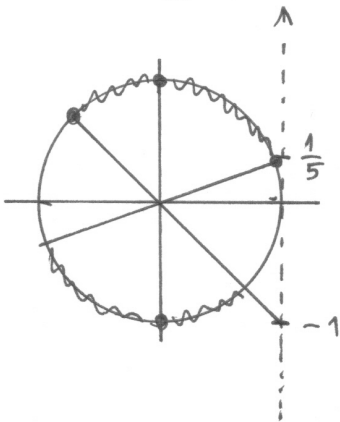
$$5 \tan^2 x + 4 \tan x - 1 \leq 0$$

$$\tan x \leq -1 \quad || \quad \tan x \geq \frac{1}{5}$$

חזרה: π

באזכור האים שהתואים למתקרים

ק'ה



$$\boxed{\arctan \frac{1}{5} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k}$$

$$\textcircled{5} \quad \cos^2 x - 2 \cdot \sin 2x - 5 \sin^2 x \leq 0$$

$$\cos^2 x - 4 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x \leq 0$$

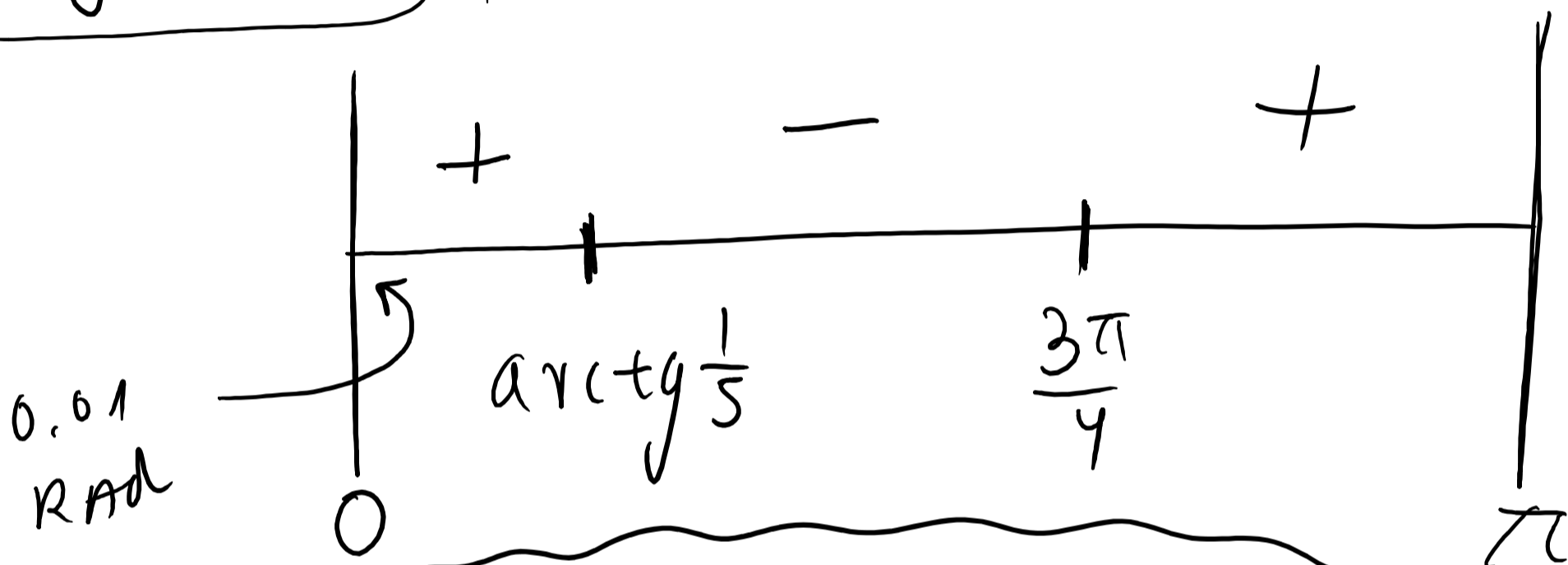
$$(\cos x - 5 \sin x)(\cos x + \sin x) \leq 0$$

$$\cos x = 5 \sin x \quad | \quad \cos x = -\sin x$$

$$\frac{1}{5} = \tan x \quad | \quad -1 = \tan x$$

$$\arctan \frac{1}{5} + \pi k = x$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$



$$\arctan \frac{1}{5} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$\textcircled{6} \textcircled{10} \quad 6 \cdot 9 + 10 \cdot 27 + 14 \cdot 81 + \dots + (4n-2)3^n = (2n-2) \cdot 3^{n+1}$$

???

$$n=2 \quad 6 \cdot 9 = 54 \quad (2 \cdot 2 - 2) \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

..... ') N))

(n+1) נאניא וקל

$$\underbrace{6 \cdot 9 + 10 \cdot 27 + \dots + (4n-2) \cdot 3^n + (4n+2) \cdot 3^{n+1}}_{\text{ע"י ההנחה}} = 2n \cdot 3^{n+2}$$

$$(2n-2) \cdot 3^{n+1} + (4n+2) \cdot 3^{n+1} = 2n \cdot 3^{n+2}$$

$$3^{n+1} (2n-2 + 4n+2) =$$

$$3^{n+1} \cdot 6n = \boxed{2n \cdot 3^{n+2}} \quad \text{f.u.N}$$

$$\textcircled{7} \quad (1+i)z^2 - (3+i)z + 4i = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{3+i \pm \sqrt{9+6i+i^2 - 16i(1+i)}}{2(1+i)} = \frac{3+i \pm \sqrt{8+6i-16i+16}}{2(1+i)}$$

$$\frac{3+i \pm \sqrt{24-10i}}{2(1+i)} = \frac{3+i \pm (5-i)}{2(1+i)}$$

$$\frac{3+i+5-i}{2(1+i)} = \frac{4}{1+i}$$

$$\frac{4 \text{ cis } 0}{\sqrt{2} \text{ cis } 45} =$$

$$\boxed{2\sqrt{2} \text{ cis } (-45)}$$

$$\frac{3+i-5+i}{2(1+i)} =$$

$$\frac{-2+2i}{2(1+i)} = \frac{-1+i}{1+i}$$

$$\frac{\sqrt{2} \text{ cis } 135}{\sqrt{2} \text{ cis } 45} =$$

$$\text{cis } 90 = i$$

$$\sqrt{24-10i} = x+yi$$

$$24-10i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$24 = x^2 - y^2$$

$$-10 = 2xy \Rightarrow y = -\frac{5}{x}$$

$$24 = x^2 - \frac{25}{x^2}$$

$$x^4 - 24x^2 - 25 = 0$$

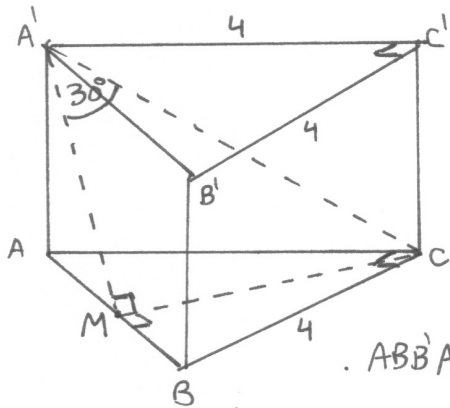
$$(x^2 - 25)(x^2 + 1) = 0$$

$$x = 5 \quad | \quad x = -5$$

$$y = -1 \quad | \quad y = 1$$

$$\begin{matrix} 5-i \\ -5+i \end{matrix}$$

פתרון שאלה 7 בקובץ זמיר מאפריל '16



ציהוי הנלווה קין A' של $ABB'A'$:

(עקיר $CM \perp AB$ בזקה וזינון כמש"ט)
 $CM \perp ABB'A' \leftarrow$ (פאה צדדיה ואלונת
 ארסיס בתנסרה יסרה. אונק אישר התיגוק
 קאחד גמני אישורים ואלונכיים הוא אונק
 אישר הפני)

CM אונק $\leftarrow A'M$ הטלן של $ABB'A'$.

$\angle CA'M = 30^\circ$ (הנלווה קין התנסופה A' לקין
 הטלן של אישר $ABB'A'$) \leftarrow

תיולקיים: $AB = 4\sqrt{2}$ (פיגורס ΔABC)

$CM = AM = BM = 2\sqrt{2} \leftarrow$ (תוצון אישר שנה איחודית היזר)

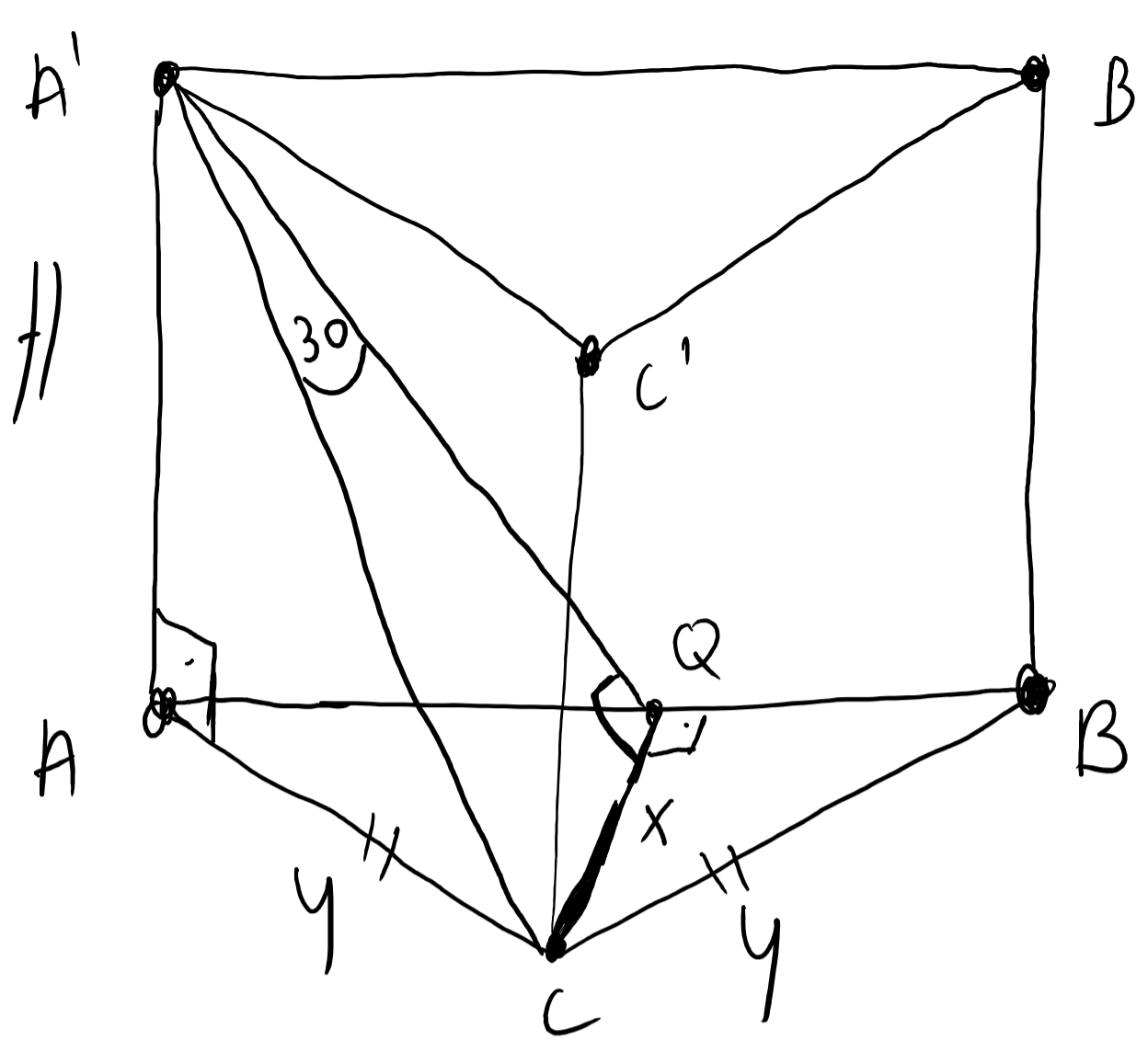
$$A'M = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leftarrow (\Delta A'CM) \tan 30^\circ = \frac{CM}{A'M}$$

$(CM \perp A'M \leftarrow CM \perp ABB'A')$

$$AA' = 4 \leftarrow (\Delta AA'M) \text{ פיגורס } (AA')^2 = (A'M)^2 - AM^2 = \frac{36 \cdot 2}{3} - 4 \cdot 2 = 16$$

$$V(ABCA'B'C') = S(\Delta ABC) \cdot AA' = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 4 = \boxed{32}$$

7



① $\triangle ABC$:

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

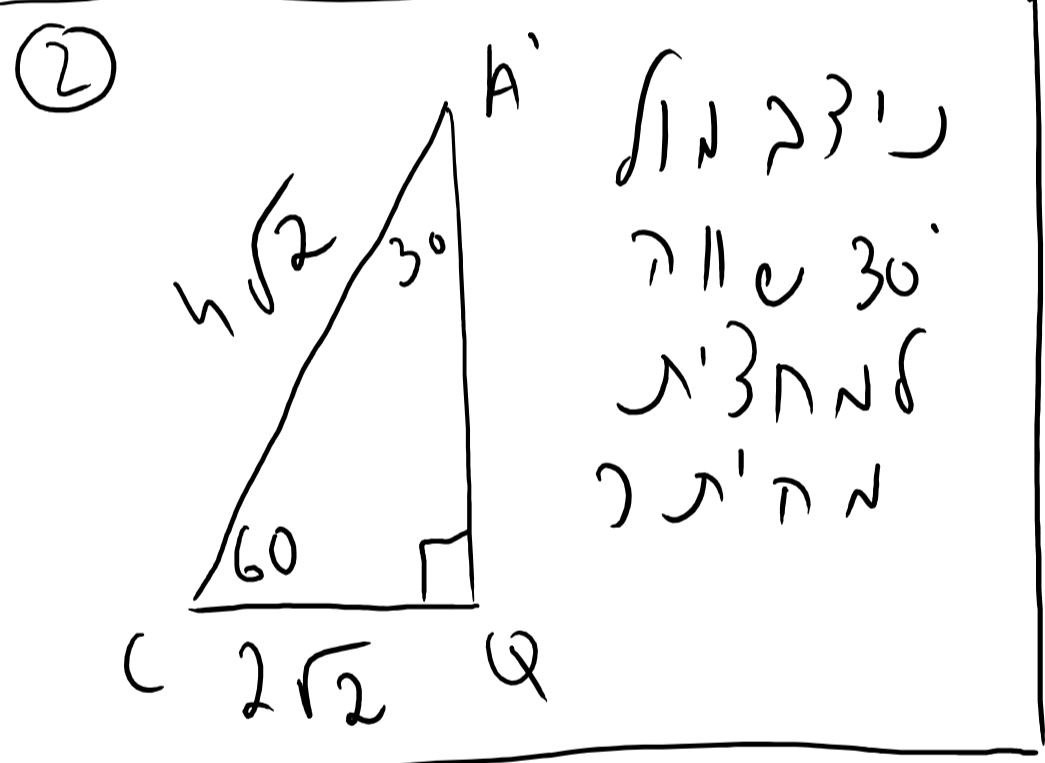
השטח של $\triangle ABC$ הוא:

$$\frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{x \cdot 4\sqrt{2}}{2}$$

$$4 = \sqrt{2} \cdot x$$

$$2\sqrt{2} = x$$

מנקודה C



נורמל אנך ל AB (ישר
היתר) בין שני מישורים
מאונכים. האנך יהיה
קו $CQ \perp AB$ קו Q
מרכז Q על AB .
קו מאונך אישר

היתר וזוהי מאונך לכל מישור ABC וזוהי
על אישר AQ זכור $\angle CA'Q = 30^\circ$ זכור

③ $\triangle CAA'$: $4^2 + H^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow H = 4$

$$V = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 32$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{x^2 + ax}{bx + 1}$$

$$y' = \frac{(2x-1)(bx+1) - b(x^2-x)}{(bx+1)^2}$$

$$y'(1) = \frac{(2-1)(b+1) - b(1-1)}{(b+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$4(b+1) = (b+1)^2$$

$$b = -1 \quad 4 = b+1$$

$$\emptyset \quad \boxed{3 = b}$$

(1,0)

$$8x + 2y = 7$$

$$2y = -8x + 7$$

$$m = -4$$

$$\Rightarrow m_{\perp} = \frac{1}{4}$$

$$0 = 1 + a$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$y = \frac{x^2 - x}{3x + 1}$$

$$x=0 \Rightarrow \textcircled{(0,0)}$$

$$y=0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \quad \textcircled{(0,0)} \quad \textcircled{(1,0)}$$

$$x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} F(x) = \infty$$

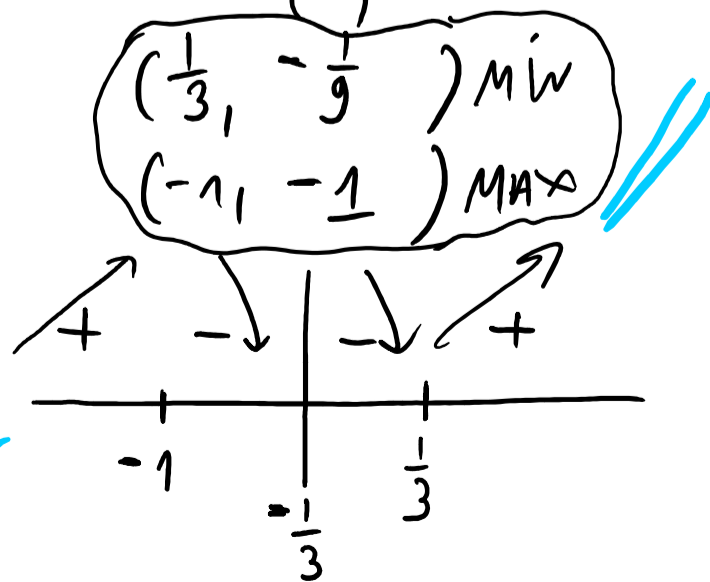
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - x}{3x^2 + x} = \dots = \frac{1}{3}$$

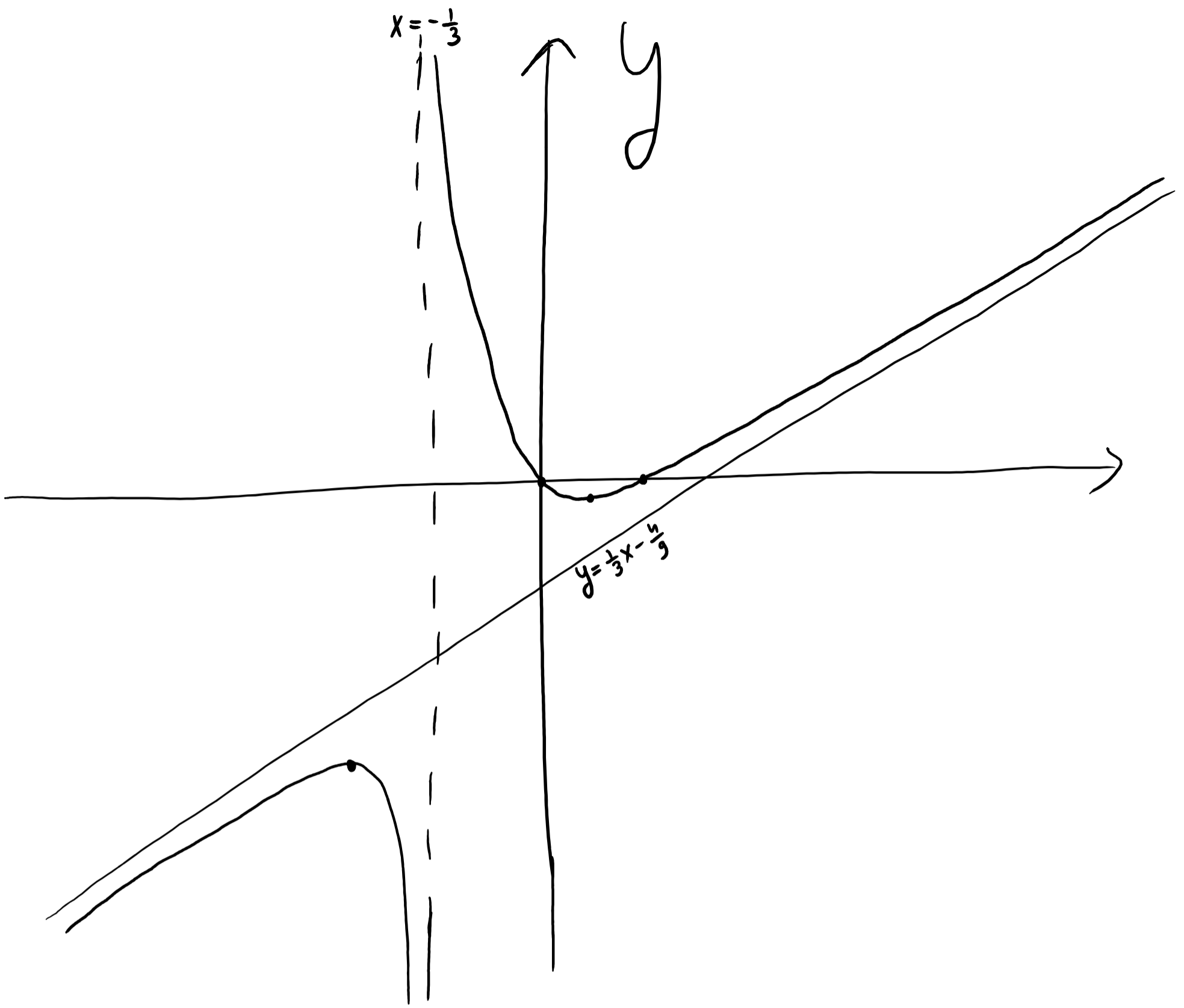
$$\textcircled{y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}} \quad \textcircled{x = -\frac{1}{3}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - x}{3x + 1} - \frac{x}{3} \right) = \frac{3x^2 - 3x - 3x^2 - x}{3(3x + 1)} = \frac{-4x}{9x + 3} = \frac{-4}{9}$$

$$y' = \frac{(2x-1)(3x+1) - 3(x^2-x)}{()^2} = \frac{6x^2 - x - 1 - 3x^2 + 3x}{()^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{()^2}$$

$$\begin{aligned} x < -1, x > \frac{1}{3} &: \text{הסך} \\ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} &: \text{ימי} \\ -1 < x < -\frac{1}{3} & \end{aligned}$$





$$\textcircled{9} \quad p(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + ax + b \quad \textcircled{10}$$

$$(x-t)^3$$

t pfe
'2/5

$$p(t) = 0$$

$$p'(t) = 0$$

$$p''(t) = 0$$

$$p' = 4x^3 - 30x^2 + 72x + a$$

$$p'' = 12x^2 - 60x + 72 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\boxed{x=2} \quad x=3$$

'2/5

$$p(2) = 0 \Rightarrow 16 - 80 + 144 + 2a + b = 0$$

$$p'(2) = 0 \Rightarrow 32 - 120 + 144 + a = 0$$

$$\boxed{a = -56}$$

$$\boxed{b = 32}$$

$$\textcircled{2} \left(y^{-\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{8}} \right)^n$$

$$C_n^k \left(y^{-\frac{2}{3}} \right)^{n-k} \cdot \left(-1 y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{8}} \right)^k$$

$$C_n^k (-1)^k \left(y^{-\frac{2}{3}(n-k) + \frac{1}{4}k} \cdot x^{-\frac{3}{8}k} \right) \parallel y^2 \cdot x^{-3}$$

$$-\frac{2}{3}(n-k) + \frac{1}{4}k = 2$$

$$-\frac{3}{8}k = -3$$

$$k = 8$$

$$-\frac{2}{3}(n-8) + 2 = 2$$

$$n = 8$$

$$C_8^8 (-1)^8 y^2 x^{-3} \Rightarrow$$

$$1 y^2 x^{-3} =$$

$$\frac{y^2}{x^3}$$