בחינת גמר במתמטיקה - מועד ב'

הנחיות לנבחן:

א. משך הבחינה 3.5 שעות. אין לצאת ב- 45 הדקות האחרונות של הבחינה.
יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.
ב. יש לפתור שתיים מהשאלות 1-3, **שאלה 6** ואחת מהשאלות 4 או 5, שתיים מהשאלות 7-9.
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים בלבד.
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.
ו. כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (17%)

7% א. ידוע שלמשוואה $(1-m)x^2-2x+7-4m=0$ יש שני שורשים בעלי סימנים נגדיים $x_1<0,\ x_2>0$.
הוכח כי $|x_1|^3>x_2^3$.

7% ב. 1) צייר רשומת (סקיצה) של גרף הפונקציה $f(x)=\left||x^2-2x-4|-4\right|$
(אין חובה למצוא נקודות החיתוך עם ציר ה-"x").

3% 2) כמה פתרונות יש למשוואה $\left||x^2-2x-4|-4\right|=2^{-|x|}$?

שאלה 2 (17%)

9% א. פתור: $25^{\log_3 x}-5^{1+\log_9 x^2}+5^{\log_5 4}\ge\log_{\sqrt{3}}\left(81\sqrt{3}\right)-25^{\log_9 x}$.

8% ב. פתור:
$$\begin{cases}2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5\\ \dfrac{3(x+y)}{x-y}+\dfrac{5(x-y)}{x+y}=8\end{cases}$$

שאלה 3 (17%)

9% א. עבור אילו ערכים של m לגרף הפונקציה $f(x)=x^4+2mx^3+(2m+1)x^2-5m^2x+4m-1$ אין נקודות פיתול?

8% ב. חשב: I. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-4\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$ II. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1-8x^3}{2x-1}dx$

* * * * * * * * * *

שאלה 4 (16%)

7% א. הוכח כי שלושת חוצי הזוויות במשולש נחתכים בנקודה אחת.
9% ב. במשולש ABC: $AB=10$, $D\in AB$, $AD=4$, $E\in BC$, $BE=15$, $K=CD\cap AE$, $CK:KD=5:4$,
$F\in BC$, $DF\parallel AE$. חשב את אורך הקטע BF ואורך הצלע BC.

שאלה 5 (16%)

8% א. במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ זווית הבסיס היא 2α ומרכז המעגל החסום נמצא במרחק a מקודקוד A. הבע באמצעות α ו- a את שוק המשולש ורדיוס המעגל החוסם את המשולש.

2% ב.1. הוכח את הזהויות הטריגונומטריות הבאות: $\cos 2x=\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$, $\sin 2x=\dfrac{2tgx}{1+tg^2x}$

6% ב.2. פתור את המשוואה: $(\sin x-\cos x)^2+tg\,x=2\sin^2 x$

שאלה 6 (16%) - חובה!

בקובייה שצלעה a מעבירים מישור דרך אחד המקצועות, החותך את הקובייה לשתי מנסרות שיחס הנפחים שלהן $1:2$.

8% א. מהי צורת החתך בקובייה ומהו שטחו?

8% ב. מעבירים מישור נוסף דרך אותו מקצוע, העובר גם דרך מקצוע מקביל לו, שאינו נמצא באותה פאה. באיזה יחס מחלק מישור זה את נפח המנסרה הגדולה?

* * * * * * * * * *

שאלה 7 (17%)

מקבילית ABCD שבה $A(2,3,4)$, $B(-1,-1,3)$, $C(2,7,2)$ היא בסיס הפירמידה שקדקודה $S(-4,5,6)$.

12% א. רשום את משוואת המישור המקביל למישור הבסיס, הנמצא במרחק 5 ממנו ואינו חותך את מקצועות הפירמידה. האם קיים רק מישור אחד כזה?

5% ב. מצא את נקודת החיתוך של תיכוני הפאה SDC.

שאלה 8 (17%)

9% **א.** הפולינום $p(x)=2x^5-3x^4+ax^3+49x^2+bx+14$ מתחלק ללא שארית ב- $(x-1)^2$.
מצא את a , b ואת כל שורשי הפולינום.

8% ב. a_k הוא איבר כללי של הסדרה החשבונית $1,4,7,\ldots$. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי עבור כל $n\in N$ המספר $1+3^{a_n}+3^{2a_n}$ מתחלק ב-13 ללא שארית.

שאלה 9 (17%)

9% א. אחת משוקי משולש שווה שוקיים, הנמצא מעל ציר ה-"x", מונחת על הישר $3x-4y+36=0$ ובסיסו מונח על ציר ה-"x" עצמו. המעגל החסום במשולש משיק לבסיסו בנקודה $(3,0)$. מצא את משוואת המעגל ומשוואת הישר עליו מונחת השוק השנייה.

8% ב. צייר במישור המרוכב את כל הנקודות $z=(x,y)$ המקיימות $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{Im}\frac{1}{z}\geq\frac{1}{2}$.

בהצלחה!

1

ב

$(1-m)x^2 - 2x + 7 - 4m = 0$

1

$|x_1|^3 > x_2^3$ $\qquad x_1 < 0$

$-x_1^3 > x_2^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$

שני הצדדים
חיוביים

$-x_1 > x_2$

$0 > x_1 + x_2$

$0 > \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{2}{1-m} < 0$

$+ \quad -$

1

$m > 1$

$x_1 < 0$
$x_2 > 0$ $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 < 0$

$\frac{c}{a} < 0 \qquad \frac{7-4m}{1-m} < 0$

$+ \quad - \quad +$

$1 \qquad \frac{7}{4}$

$\boxed{1 < m < \frac{7}{4}}$

לכן
מתקיים

2 k

$$2x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$\frac{x_2}{x_2-1} + \frac{x_1}{x_1-1} = \frac{x_1x_2 - x_2 + x_1x_2 - x_1}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$$\frac{2x_1x_2 - (x_1+x_2)}{x_1 \cdot x_2 - (x_1+x_2)+1} = \frac{-4-\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}+1} = \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} = 3$$

$$\frac{x_2}{x_2-1} \cdot \frac{x_1}{x_1-1} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{w \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{4}{3}\right) = 0}$$

ח

ב

$y = x^2 - 2x - 4$

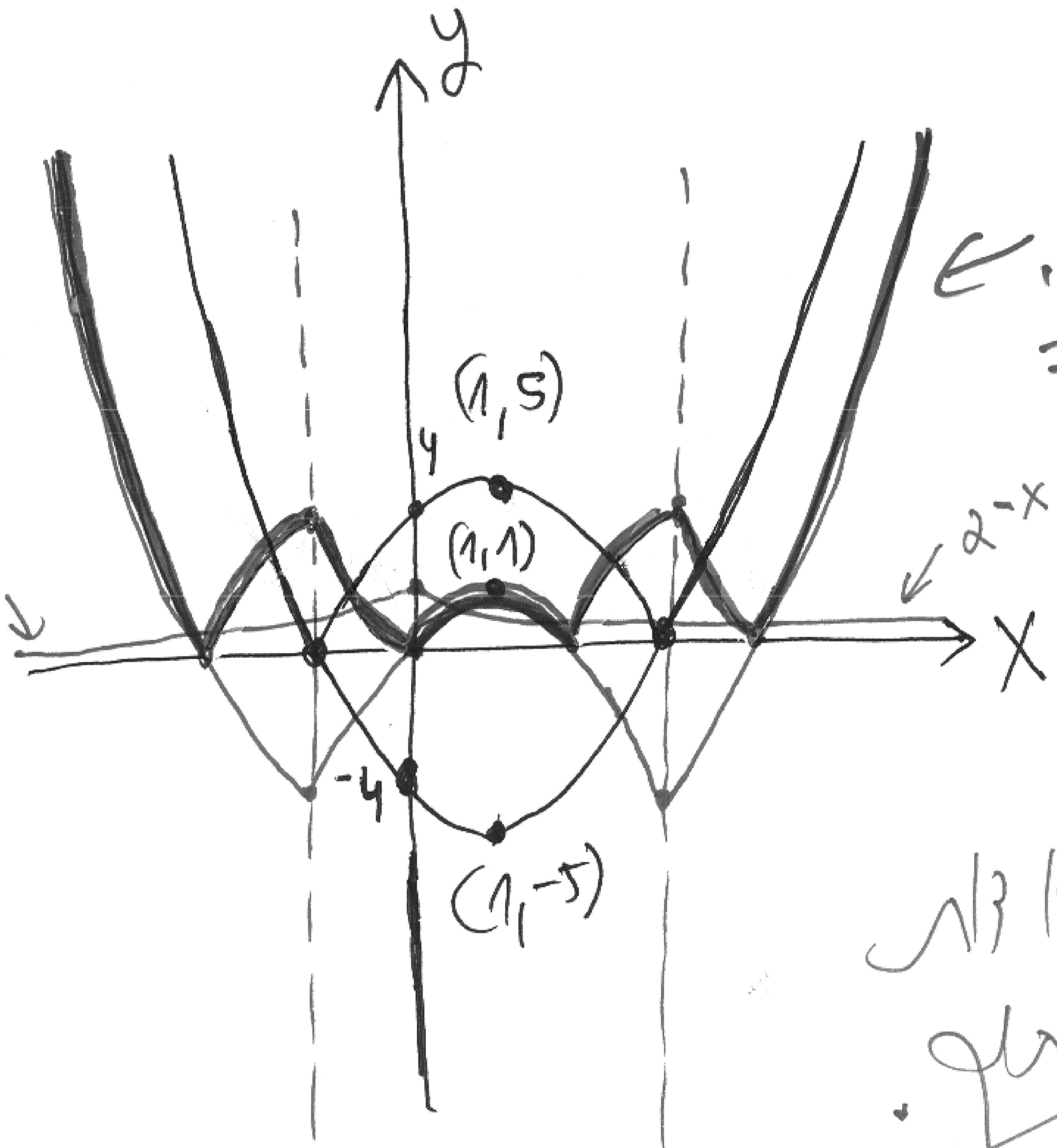
$\frac{-b}{2a} = 1$

$(1, -5)$

הורדה מטה

$y = \overbrace{|x^2 - 2x - 4|}^{\text{שיקוף}} - 4$

סופי $y = \underbrace{\left| |x^2 - 2x - 4| - 4 \right|}_{\text{שיקוף}}$

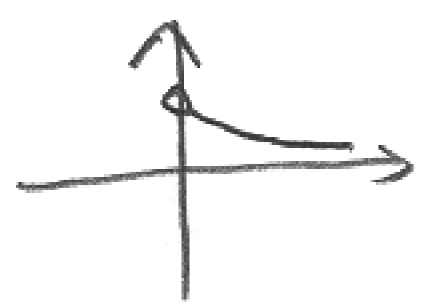


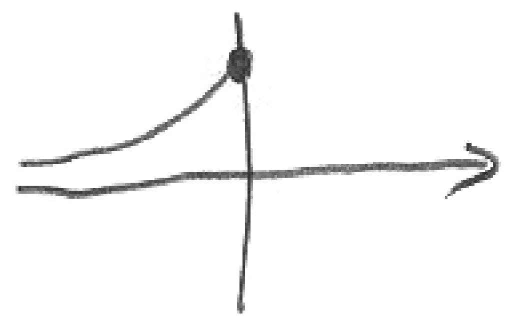
סופי

סה"כ ⑧ נקודות משותף.

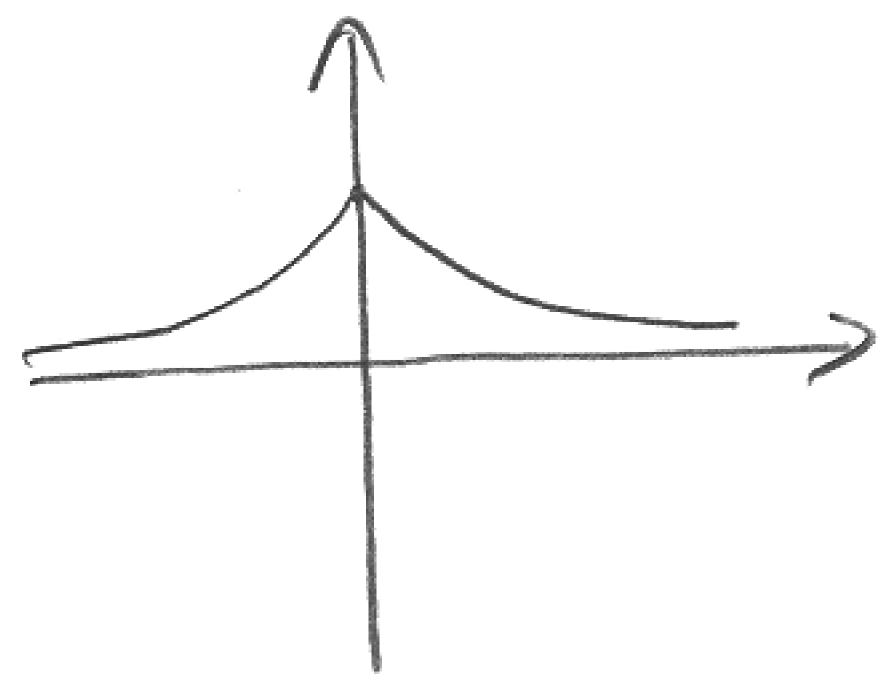
$y = 2^{-|x|}$ → $x > 0 \Rightarrow y = 2^{-x}$

→ $x \le 0$ $y = 2^x$





$\Rightarrow$



c) 2

$$25^{\log_3 x} - 5^{1+\overset{\log_3 x}{\overbrace{\log_9 x^2}}} + \overset{4}{5^{\log_5 4}} \geq \underbrace{\log_{\sqrt{3}} \overset{(\sqrt{3}^9)}{(81\sqrt{3})}}_{9} - 25^{\log_9 x}$$

$$25^{\log_9 x} = 25^{\frac{1}{2}\log_3 x}$$

$x > 0$

$\log_3 x = t$

$$5^{2t} - 5\cdot 5^t + 4 \geq 9 - 5^t$$

$$5^{2t} - 4\cdot 5^t - 5 \geq 0$$

$$(5^t - 5)(5^t + 1) \geq 0$$

$$5^t \geq 5$$

$$t \geq 1$$

$$\log_3 x \geq 1$$

$$\log_3 x \geq \log_3 3$$

$$\boxed{x \geq 3}$$

2

$$2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5$$

$2^{\sqrt{xy}} = t$ $\quad$ $4^{\sqrt{xy}} = t^2$

$$\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 = 5$$

$$t^2 + t - 20 = 0$$

$t = 4$ $\quad$ $t = -5$ $\quad$ X

$$2^{\sqrt{xy}} = 2^2$$

$$\sqrt{xy} = 2$$

$$\boxed{xy = 4}$$

$xy = 4$	$xy = 4$
$x = 4y$	$y = 0$
$4y^2 = 4$	$\varnothing$
$y = 1$ $\quad$ $y = -1$	
$(4, 1)$ $\quad$ $(-4, -1)$	

$$\frac{3(x+y)}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = 8$$

$$\frac{x+y}{x-y} = w$$

$$3w + \frac{5}{w} = 8$$

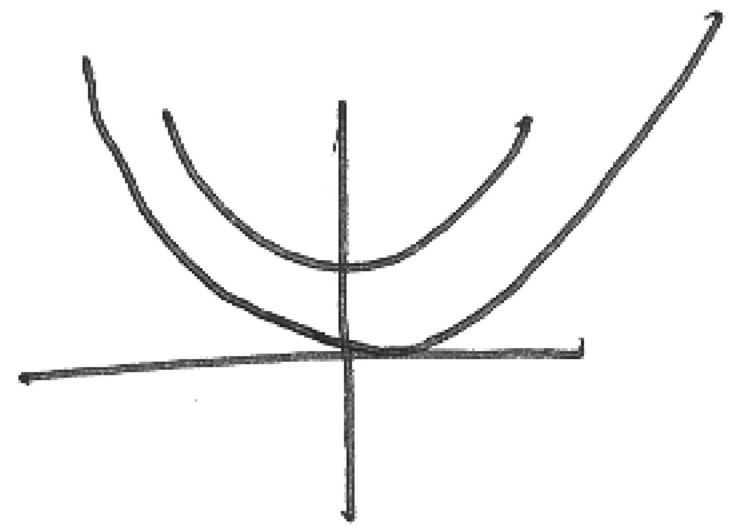
$$3w^2 - 8w + 5 = 0$$

$w = \frac{5}{3}$	$w = 1$
$\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}$	$\frac{x+y}{x-y} = 1$
$3x + 3y = 5x - 5y$	$x + y = x - y$
$8y = 2x$	$2y = 0$
$4y = x$	$y = 0$

3

$$y = x^4 + 2mx^3 + (2m+1)x^2 - 5m^2x + 4m - 1$$

$$y' = 4x^3 + 6mx^2 + 2(2m+1)x - 5m^2$$



$$y'' = 12x^2 + 12mx + 2(2m+1)$$

$12 \cdot 12$

$$\Delta \leq 0 \qquad (12m)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2(2m+1) \leq 0$$

$$3m^2 - 2(2m+1) \leq 0$$

$$3m^2 - 4m - 2 \leq 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16+24}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$\boxed{\frac{2-\sqrt{10}}{3} \leq m \leq \frac{2+\sqrt{10}}{3}}$$

(2) (3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-4\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$$

$1+\cos 2x$

$1+(2\cos^2 x-1)$

$2\cos^2 x$

$$\int \frac{1-4\cdot 2\cdot \sin x\cdot \cos x}{2\cos^2 x} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 4\cdot tg\, x$$

$\int tg x\, dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$-\frac{1}{t}\,dt$

$-\ln|t|$

$-\ln|\cos x|$

$$\frac{1}{2}\cdot tg x + 4\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{2} tg\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(\frac{1}{2} tg 0 + 4\ln|\cos 0|\right) =$$

$$\frac{1}{2} + 4\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+0) = \boxed{\frac{1}{2} + 4\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

3

$$\int_{-1}^{0} \frac{1-8x^3}{2x-1}\,dx$$

$$\frac{(1-2x)(1+2x+4x^2)}{(2x-1)}$$

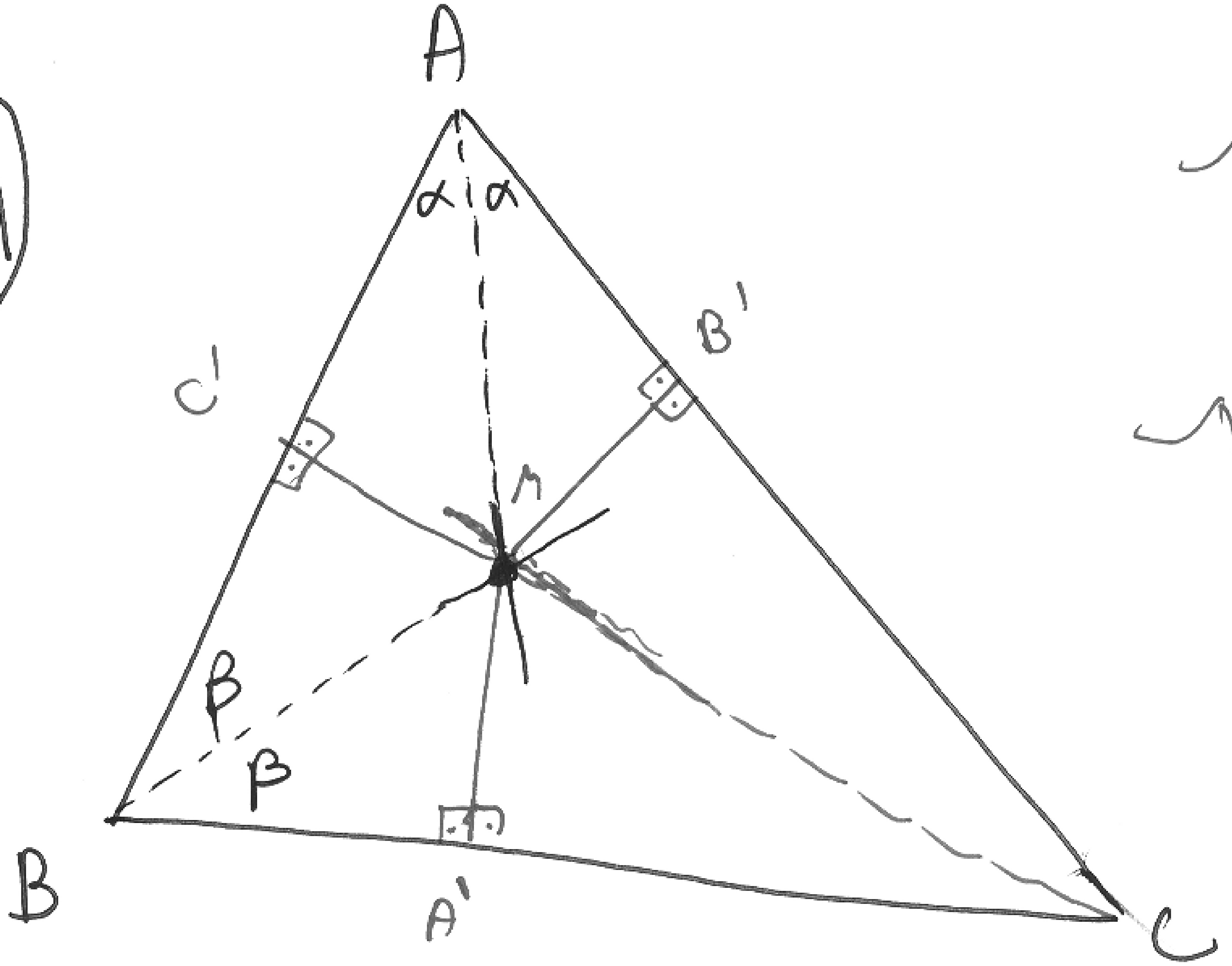
$$-1-2x-4x^2$$

$$-x-\frac{2x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$-x-x^2-\frac{4x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$(\;0\;)-(1-1+\frac{4}{3}\;)=-\frac{4}{3}$$

4ג



* נקודה על חוצה הזווית
נמצאת במרחק
שווה משוקי הזווית

$\Downarrow$

$MB' = MC'$

$MA' = MC'$

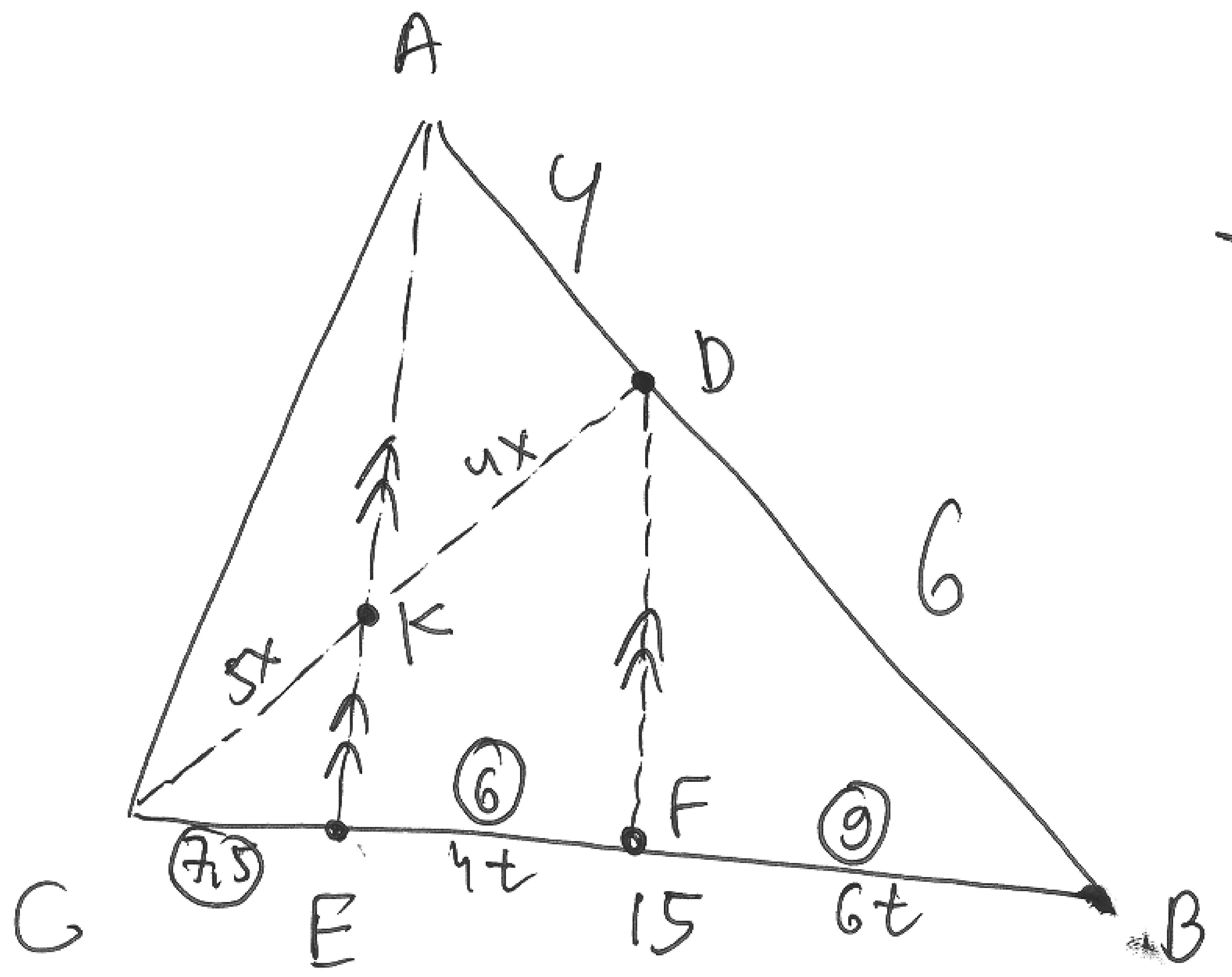
$\Downarrow$

$MA' = MB'$

$\Downarrow$

* נקודה שנמצאת במרחק שווה משוקי הזווית
נמצאת על חוצה הזווית

4



$$\frac{CK}{KD} = \frac{5}{4}$$

$$AE \parallel DF \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE}$$

$4t + 6t = 15$

$10t = 15$

$t = 1.5 \to 6t = 9$

$\quad\quad\;\; \to 4t = 6$

$$\boxed{BF = 9}$$

$KE \parallel DF$

$\Downarrow$

$$\frac{CK}{KD} = \frac{CE}{EF}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{CE}{6}$$

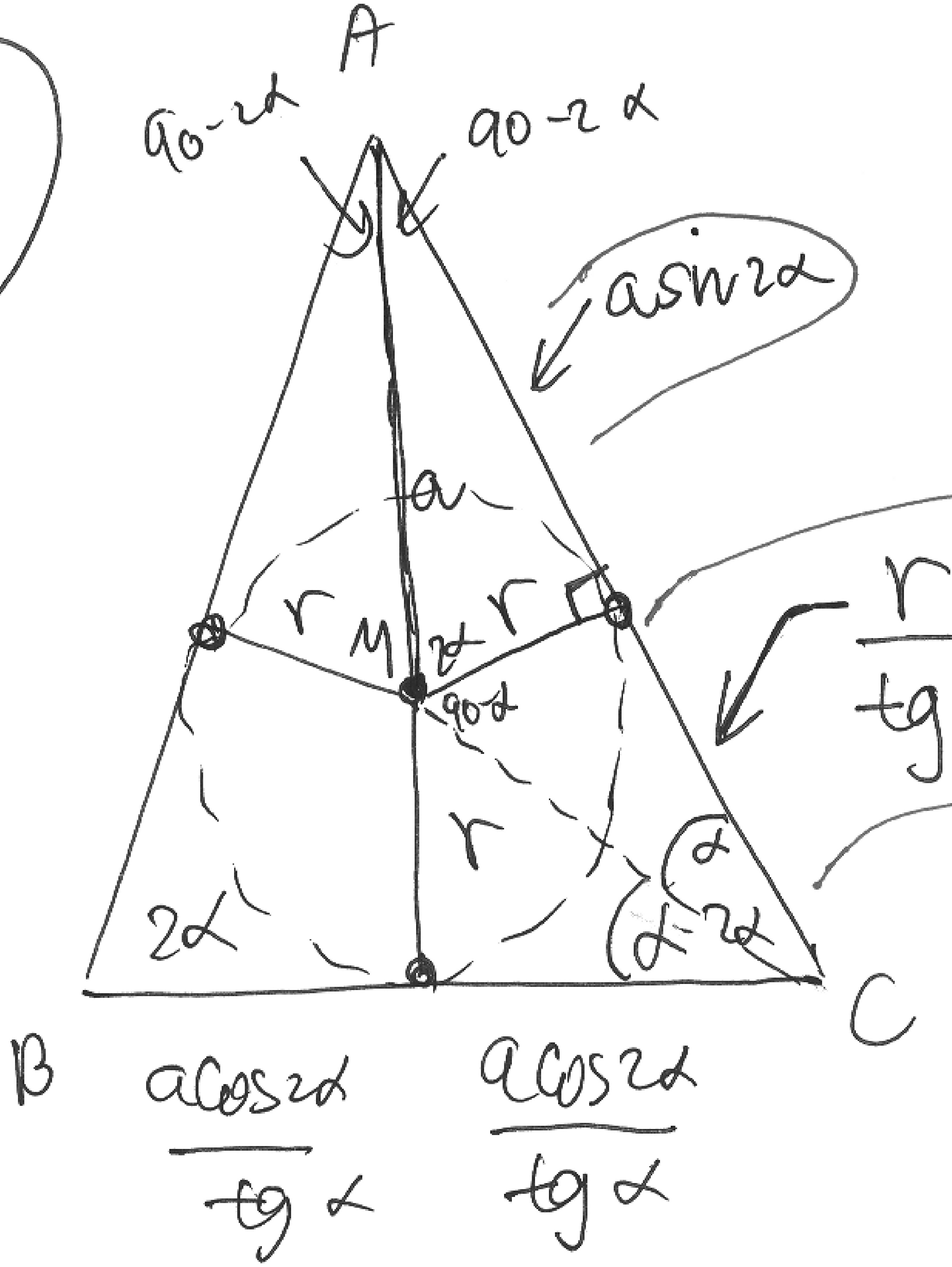
$$\frac{30}{4} = 7.5 = CE$$

$CB =$

$7.5 + 15$

$$\boxed{22.5}$$

5
ק



$a\sin 2\alpha$

$$r = a\cos 2\alpha$$

$$\frac{r}{tg\alpha} = \frac{a\cos 2\alpha}{tg\alpha}$$

דרך אחרת ל- AC:

$\underline{\Delta AMC}$: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(90+\alpha)}$

$$\boxed{AC = a\cot\alpha}$$

$$\boxed{AC = a\sin 2\alpha + \frac{a\cos 2\alpha}{tg\alpha}}$$

$$a\sin 2\alpha + \frac{a\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\frac{a(\sin\alpha\sin 2\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha} = a\cot\alpha$$

$\underline{\Delta ABC}$: $\frac{2a\cos 2\alpha}{tg\alpha \cdot \sin 4\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\cancel{\cos 2\alpha}}{tg\alpha \cdot 2\sin 2\alpha\cancel{\cos 2\alpha}}$

$$\boxed{R = \frac{a}{2\,tg\alpha \cdot \sin 2\alpha}}$$

5
?

1

$$\cos 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} \rightarrow \frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}} = \cos^2x - \sin^2x$$

$$= \underline{\underline{\cos 2x}}$$

$$\sin 2x = \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2x} \Rightarrow \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2x}} = 2\sin x\cos x$$

$$= \sin 2x$$

2

$$(\sin x - \cos x)^2 + tg\,x = 2\sin^2x \qquad \cos x \neq 0$$

$$\underline{\sin^2x} - 2\sin x\cos x + \underline{\cos^2x} + tg\,x = 2\sin^2x$$

$$1 - 2\sin^2x - \sin 2x + tg\,x = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 0 \qquad \operatorname{tg} x = t$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + t = 0$$

$$1-t^2-2t+t+t^3=0$$

$$1-t-t^2+t^3=0$$

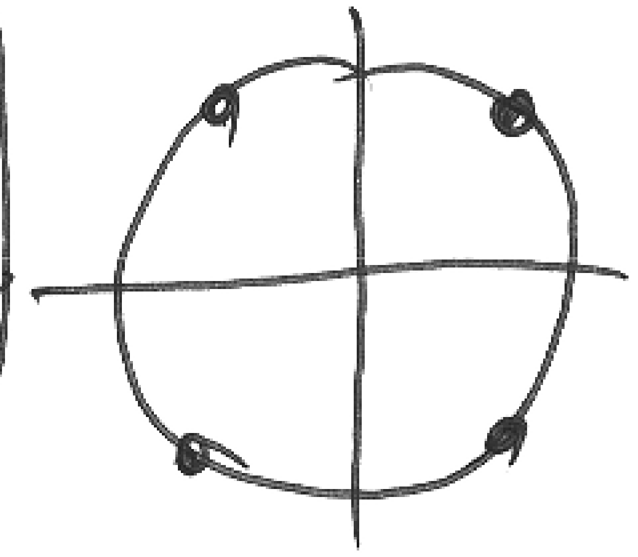
$$(1-t)-t^2(1-t)=0$$

$$(1-t)(1-t^2)=0$$

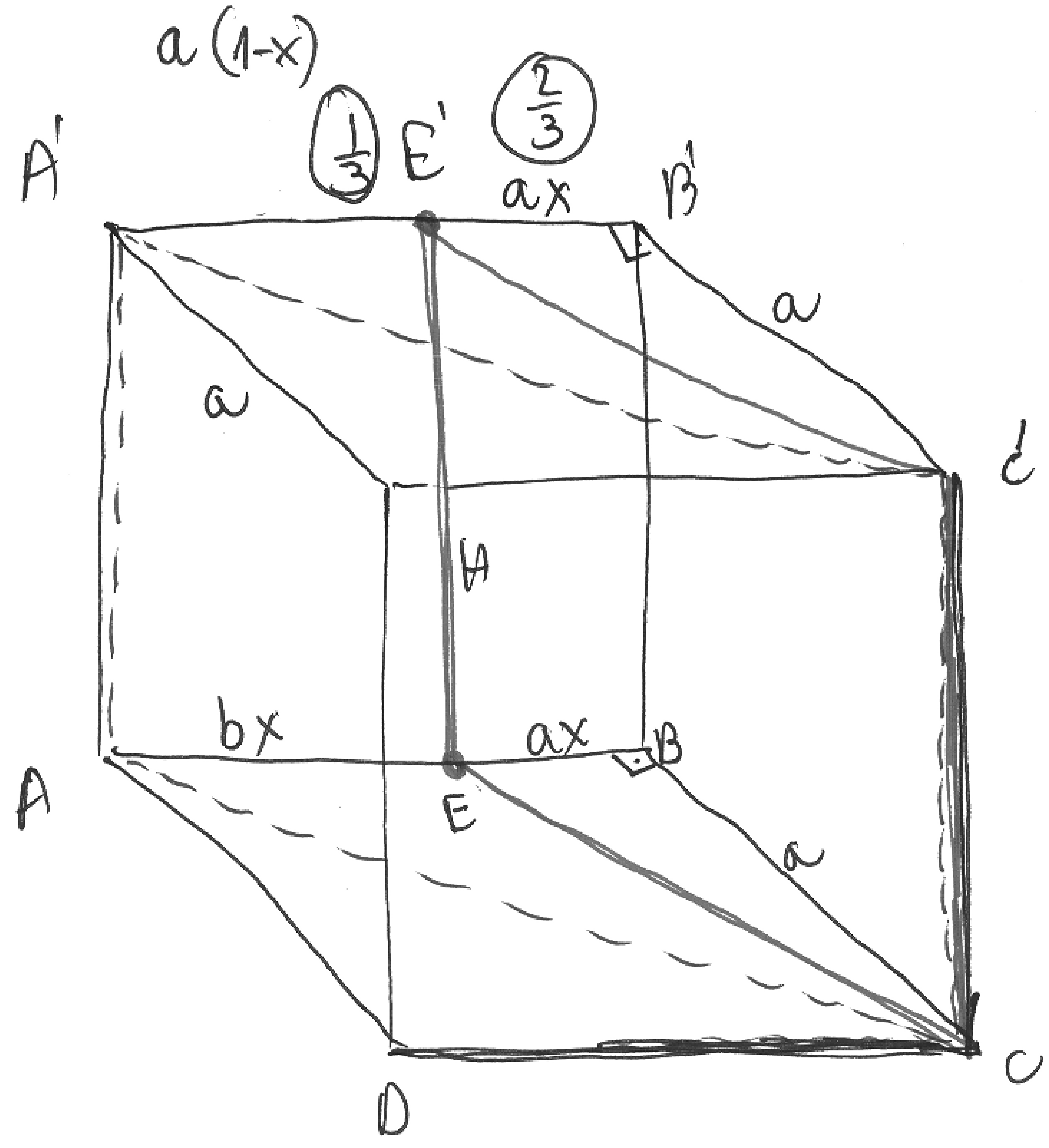
$t=1 \qquad t=-1$

$\operatorname{tg} x = 1 \qquad \operatorname{tg} x = -1$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k}$$



⑥



$$\frac{\frac{a \cdot ax}{\cancel{2}} \cdot \cancel{H}}{\frac{(a(1-x)+a)\cdot a}{\cancel{2}} \cdot \cancel{H}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2 x}{a^2(2-x)} = \frac{1}{2}$$

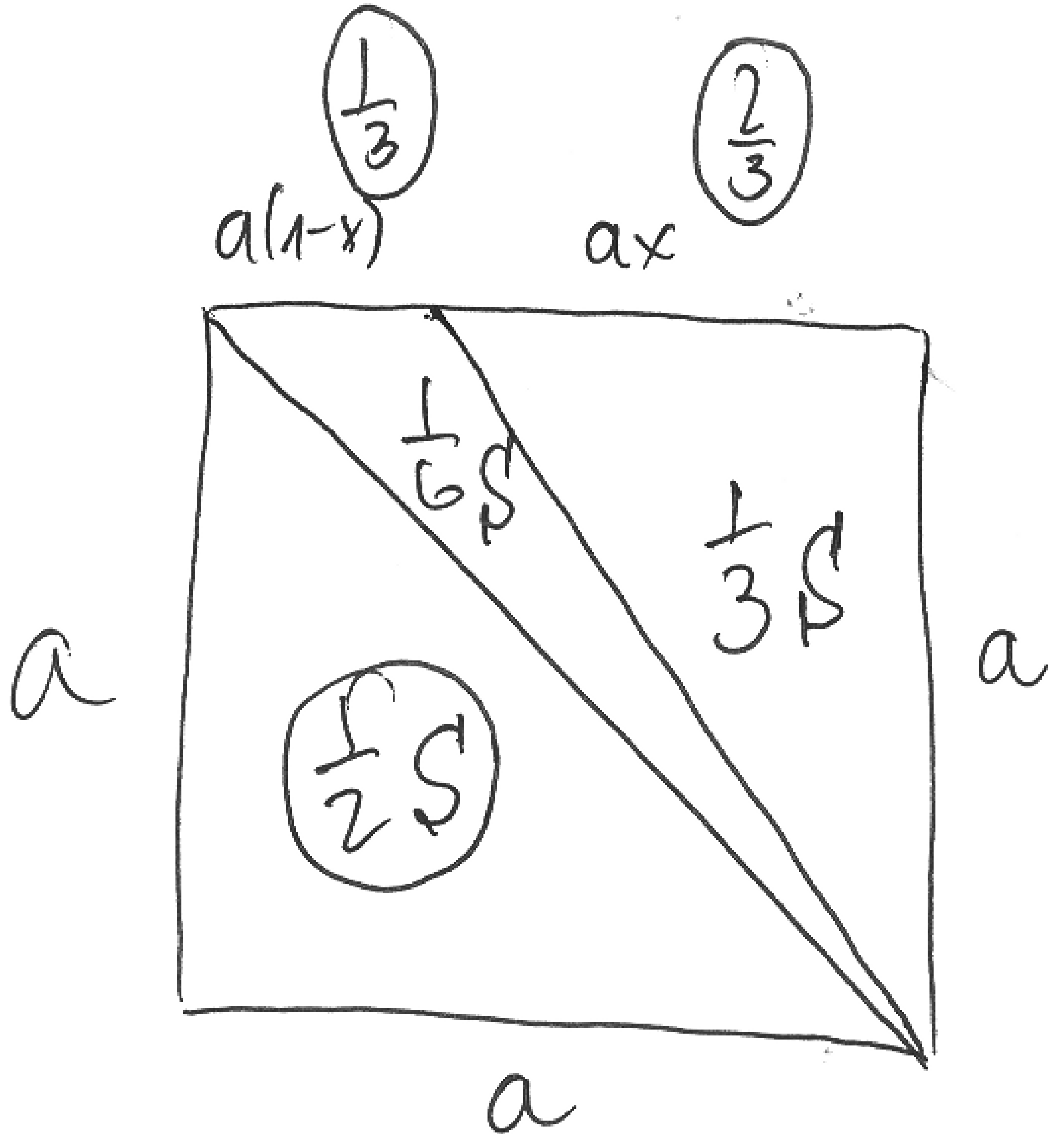
$$2x = 2 - x$$

$$3x = 2$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{9}} = \frac{\sqrt{13}\,a}{3}$$

$CC'E'D$ Pfn $\Rightarrow S = \frac{\sqrt{13}\,a^2}{3}$



$$S \to \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{3}S$$

$$S \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{6}S$$

$$S \to \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$$

$$\overline{\quad S \quad}$$

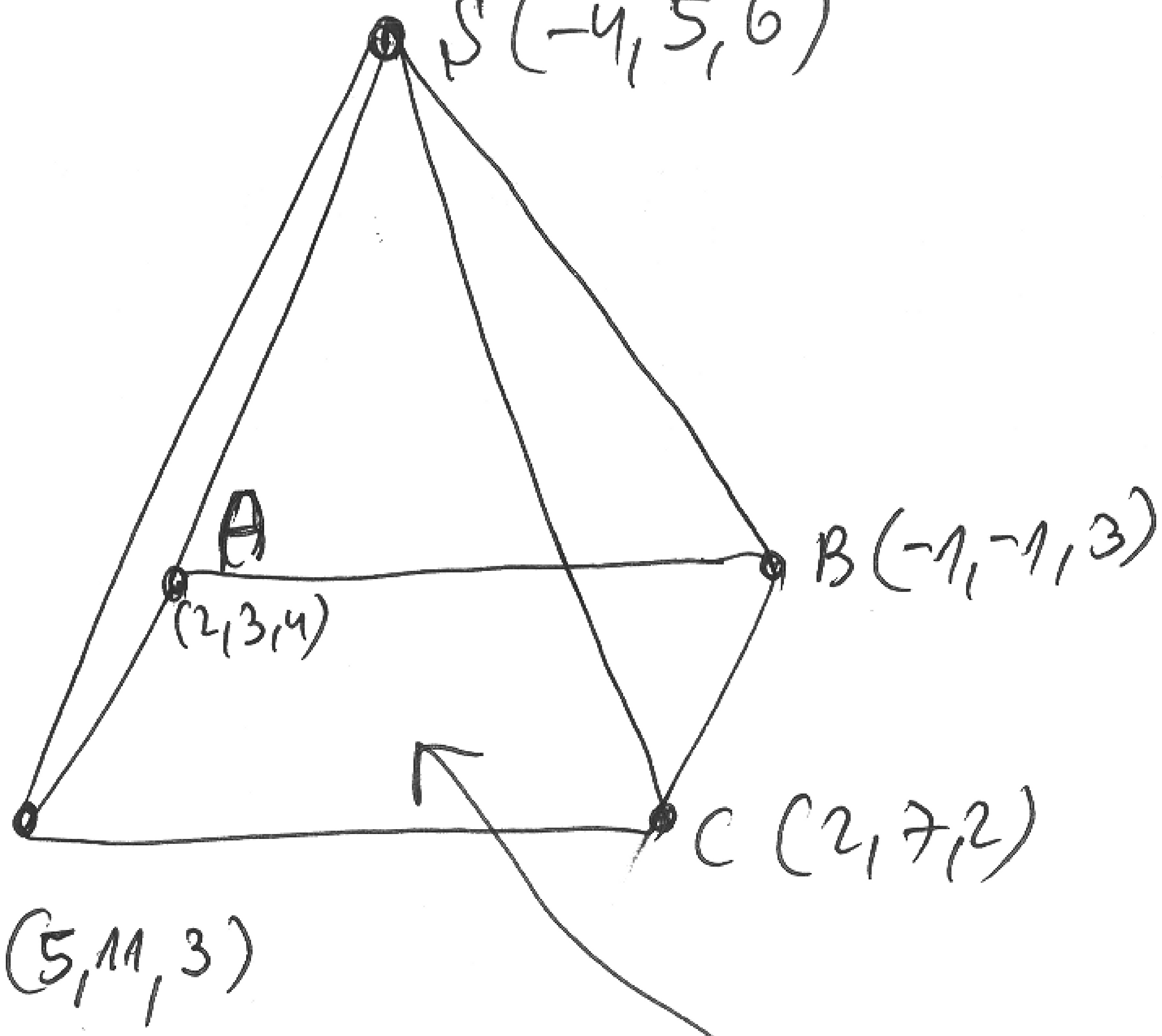
$$\frac{1}{2}S : \frac{1}{6}S$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{6} : \frac{1}{6}$$

$$\boxed{3 : 1}$$

7c



$-2+1-6+D=0 \qquad D=7$

$\boxed{2x-y-2z+7=0}$

$\vec{AB}\ (-3, -4, -1)$

$\vec{AD}\ (3, 8, -1)$

A	B	C
-3	-4	-1
3	8	-1

$(12, -6, -12)$

$(2, -1, -2)$

$2x - y - 2z + D = 0$

$-1 \quad -1 \quad 3$

מרחק הנקודה מהמישור:

$$\frac{|2(-4)-5-12+7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|-8-5-12+7|}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$2x-y-2z+w=0$$

$$\frac{|w-7|}{3} = 5 \Rightarrow$$

$w-7=15$

$w=22$

$2x-y-2z+22=0$

נמצא מרחק מהמישור

$$\frac{|2\cdot(-4)-5-12+22|}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$w-7=-15$

$w=-8$

$2x-y-2z-8=0$

$$\frac{|2(-4)-5-12-8|}{3} = \frac{33}{3}$$

11

רק מישור אחד

$2x-y-2z-8=0$

ב

מפגש תיכונים במשולש SDC

$S(-4,5,6)$

$D(5,11,3)$

$C(2,7,2)$

$$\left(\frac{-4+5+2}{3},\ \frac{5+11+7}{3},\ \frac{6+3+2}{3}\right)$$

$$\left(1,\ \frac{23}{3},\ \frac{11}{3}\right)$$

$$P' = 10x^4 - 12x^3 + 3ax^2 + 98x + b$$

8

c

$$P(x) \quad 2x^5 - 3x^4 + ax^3 + 49x^2 + bx + 14$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow 2 - 3 + a + 49 + b + 14 = 0$$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 10 - 12 + 3a + 98 + b = 0$$

$$- \begin{cases} a + b = -62 \\ 3a + b = -96 \end{cases}$$

$$2a = -34$$

$$\boxed{a = -17}$$

$$\boxed{b = -45}$$

$$\boxed{P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 17x^3 + 45x^2 - 45x + 14}$$

$$2x^3+x^2-17x+14$$

$$P(x)=2x^5-3x^4-17x^3+49x^2-45x+14 \;\Big|\; x^2-2x+1$$

$$2x^5-4x^4+2x^3$$

$$x^4-19x^3+49x^2-45x+14$$

$$x^4-2x^3+x^2$$

$$-17x^3+48x^2-45x+14$$

$$-17x^3+34x^2-17x$$

$$14x^2-28x+14$$

$$14x^2-28x+14$$

$$= \quad = \quad =$$

= סוף

$$2x^3+x^2-17x+14=0$$

מקדמים

$$2,\ 1,\ -17,\ 14$$

סכום 0 אז

$x=1 \rightarrow$ מתחלק

$$2x^2+3x-14$$

$$2x^3+x^2-17x+14 \;\Big|\; x-1$$

$$2x^3-2x^2$$

$$3x^2-17x+14$$

$$3x^2-3x$$

$$-14x+14$$

$$-14x+14$$

$$2x^2+3x-14=0$$

$$x=2$$

$$x=-\frac{7}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=1 & x=2 \\ x=1 & \\ x=1 & x=-\frac{7}{2} \end{matrix}}$$

8 ?

$1, 4, 7 \ldots \qquad a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 2$

$$1+3^{3n-2}+3^{6n-4}$$

$n=1 \qquad 1+3^{1}+3^{2}=13$ ✓

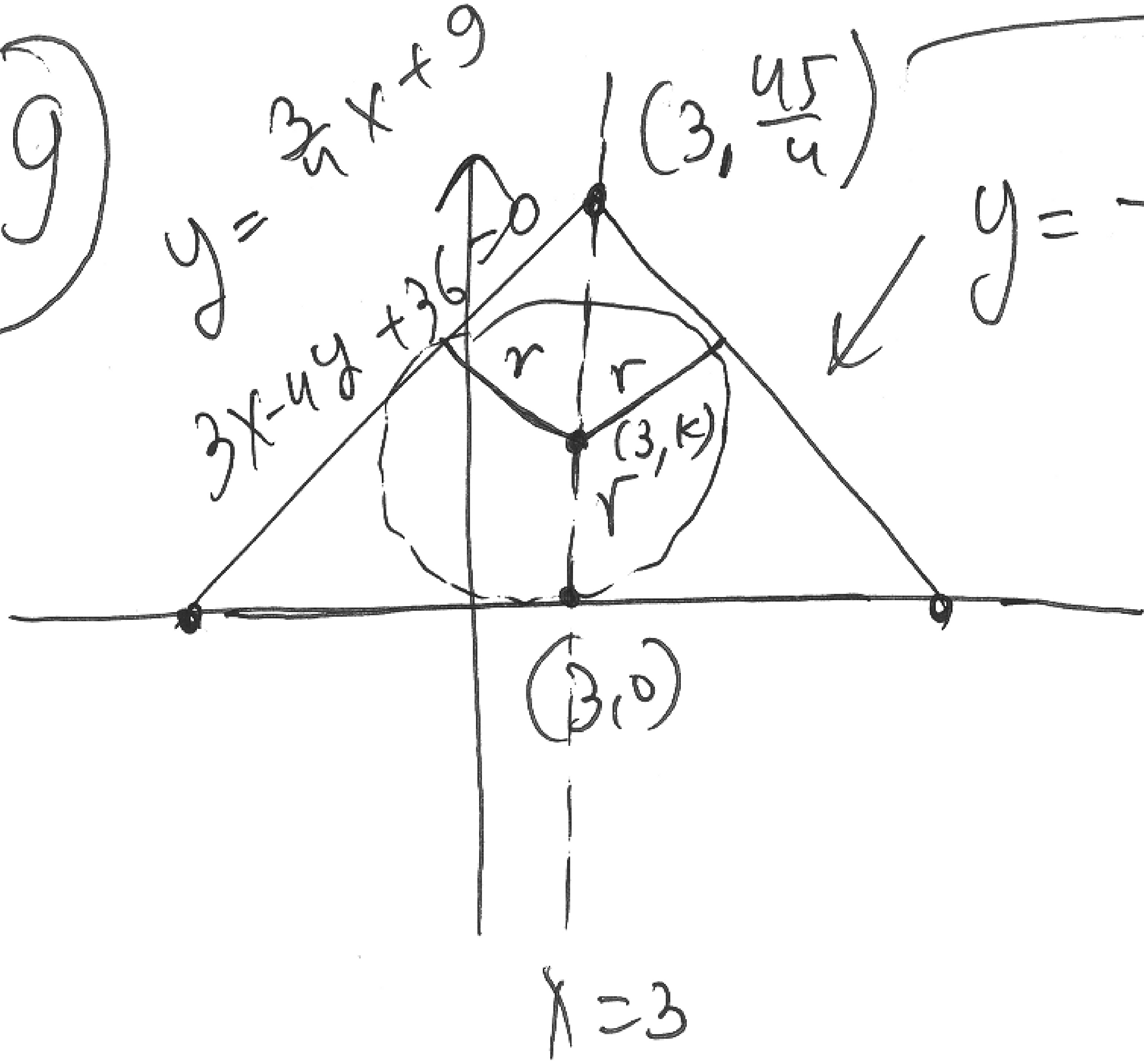
$n+1 \qquad 1+3^{3n+1}+3^{6n+2}$

$$1+3^{3n-2}\cdot 27+3^{6n-4}\cdot 729$$

$$\underbrace{\frac{(1+3^{3n-2}+3^{6n-4})}{13}}_{\text{לפי ההנחה}} + \underbrace{\frac{26\cdot 3^{3n-2}}{13}}_{\text{מתחלק}} + \underbrace{\frac{702\cdot 6^{3n-4}}{13}}_{\text{מתחלק}}$$

$\frac{702}{13} = 54$ ✓

(c) 9



$y=-\frac{3}{4}x+t$

$$\frac{45}{4}=-\frac{9}{4}+t$$

$$t=\frac{27}{2}$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{2}$$

$$4y=-3x+54$$

$$\boxed{3x+4y-54=0}$$

$$\frac{|3\cdot 3-4\cdot k+36|}{\sqrt{3^2+4^2}}=k$$

$$45-4k=\pm 5k$$

$45-4k=5k$

$5=k$

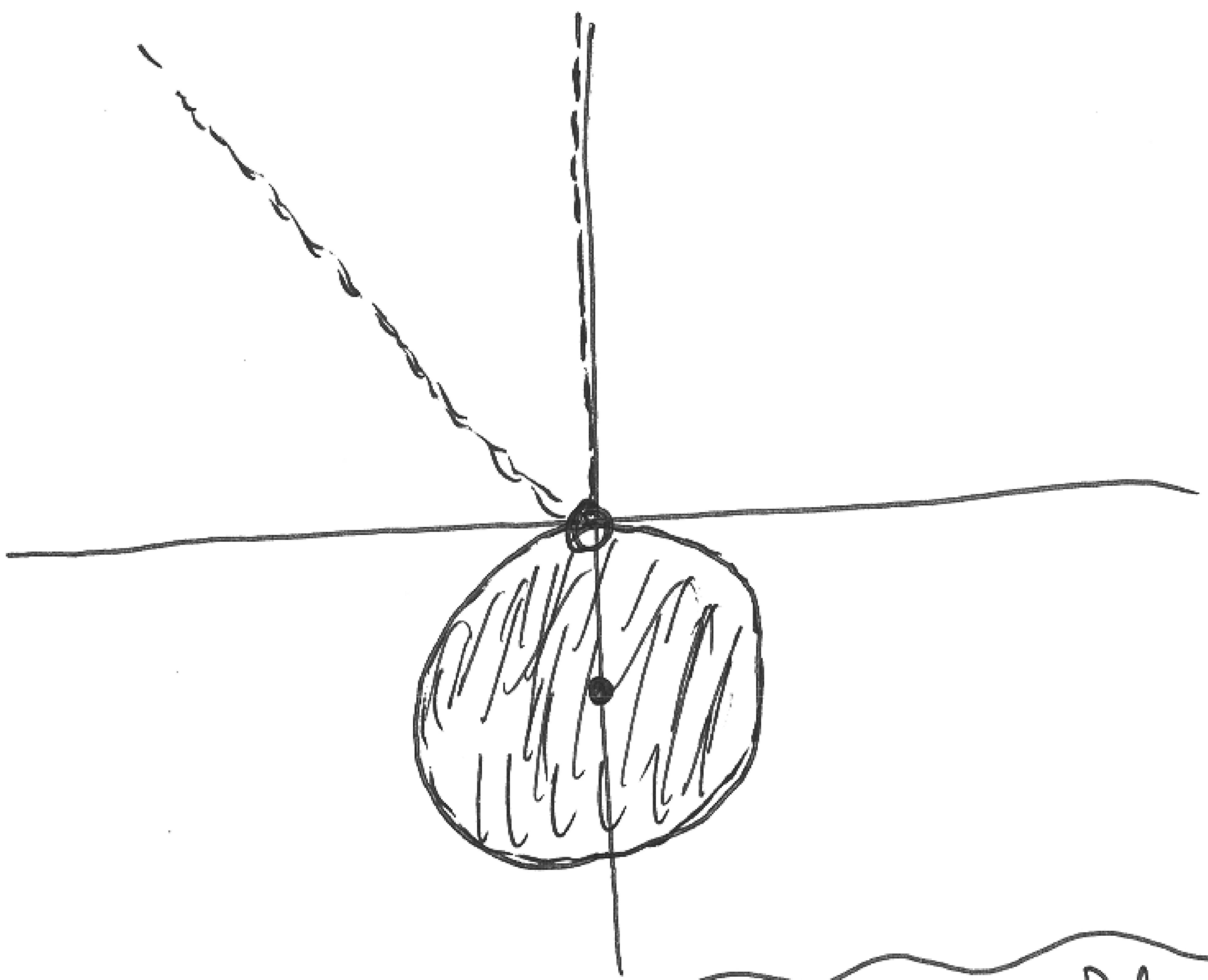
$45-4k=-5k$

çıkmaz k'f

$$\boxed{(x-3)^2+(y-5)^2=25}$$

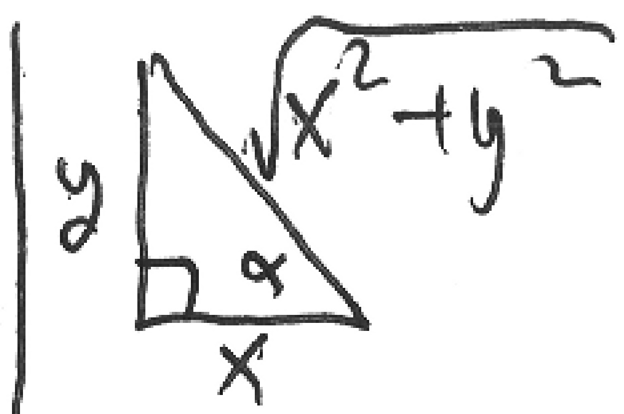
9 ?

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$



קבוצה ריקה

$Im\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2}$



$z = R \operatorname{cis} \alpha = x + iy$

$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\alpha)$

$Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{R} \sin(-\alpha) \geq \frac{1}{2}$

$\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{1}{2}$

$-2y = x^2 + y^2$

$\boxed{x^2 + (y+1)^2 \leq 1}$

$(0,-1) \quad R = 1$