פתרונות

1. א' יש להוכיח כי לכל שני מספרים מרוכבים z_1 , z_2 מתקיים: $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2 \le 3\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$

פתרון:

$$\left(z_1+z_2\right)\left(\bar{z}_1+\bar{z}_2\right)+\left(z_1-z_2\right)\left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)\le 3\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$$

ב' יש לחשב את הערך של הביטוי : $\dfrac{\left(w_0\right)^{23}+\left(w_1\right)^{23}+\left(w_2\right)^{23}}{\left(w_1\right)^{21}+\left(w_2\right)^{21}}=$

פתרון:

יש לשים לב ש- $\left(w_i\right)^3=1$ עבור $i=0,1,2$, בנוסף $w_0=1$, שורשי יחידה ציקליים

ולכן $w_2=\left(w_1\right)^2$

$$\frac{\left(w_0\right)^{23}+\left(w_1\right)^{23}+\left(w_2\right)^{23}}{\left(w_1\right)^{21}+\left(w_2\right)^{21}}=\frac{w_0^2\left(w_0\right)^{21}+w_1^2\left(w_1\right)^{21}+w_2^2\left(w_2\right)^{21}}{\left(w_1^3\right)^7+\left(w_2^3\right)^{21}}=$$

$$=\frac{w_0^2+w_1^2+w_2^2}{\left(1\right)^7+\left(1\right)^{21}}=\frac{1+w_1^2+\left(w_1^2\right)^2}{2}=\frac{1\cdot\left(\left(w_1^2\right)^3-1\right)}{2\left(w_1^2-1\right)}=\frac{1\cdot\left(\left(w_1^3\right)^2-1\right)}{2\left(w_1^2-1\right)}=0$$

.2

א' נתונות הספרות: $0,1,2,3,4,5,6,7,8$. בוחרים מתוכם שלוש ספרות זוגיות ושתי ספרות אי-זוגיות ויוצרים מספר בעל חמש ספרות שונות. כמה מספרים כאלה ניתן ליצור ?

פתרון: בוחרים 3 ספרות זוגיות בלי אפס וגם 2 ספרות אי-זוגיות: (עקרון הכפל) $C_4^3\cdot C_4^2$,

בוחרים 3 ספרות זוגיות כולל אפס וגם 2 ספרות אי-זוגיות: $C_4^2\cdot C_4^2$

כעת יוצרים את המספרים ומחברים תוצאות (עקרון החיבור) : $C_4^3\cdot C_4^2\cdot 5!+C_4^2\cdot C_4^2\cdot 4\cdot 4!$

ב' בפיתוח הבינום $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^2}}\right)^n$ יש איבר המכיל $\frac{b^8}{a^3}$. מצא את המקדם המספרי העומד לידו.

פתרון: נרשום את האיבר הכללי: $C_n^k\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{n-k}\cdot\left(a^{\frac{7}{10}}\cdot b^{-\frac{2}{10}}\right)^k=C_n^k\cdot a^{-\frac{n-k}{2}+\frac{7k}{10}}\cdot b^{\frac{n-k}{2}-\frac{2k}{10}}$

כעת נשווה את המעריך של a ל -3 , ואת המעריך של b ל- 8

נקבל מערכת שתי משוואות: $\begin{matrix}12k-5n=-30\\-7k+5n=80\end{matrix}$ מכאן נקבל $n=30\,,\,k=10$

המקדם של האיבר הוא: $C_{30}^{10}=\frac{30!}{10!\cdot20!}$

3. נתונה הפונקציה : $y=\frac{2}{x^2}+4\cdot\ln(x)$ בקטע $x\ge\frac{1}{2}$.

(4%)
א' יש למצוא נקודות קיצון מקומי ותחומי עליה/ירידה.

(3%)
ב' יש למצוא נקודות פיתול (אם יש).

(3%)
ג' האם לגרף הפונקציה יש אסימפטוטות המקבילות לצירים בקטע $x\ge\frac{1}{2}$? יש לנמק !

(3%)
ד' יש לצייר סקיצה של הגרף בקטע $x\ge\frac{1}{2}$

(4%)
ה' עבור אילו ערכים של פרמטר m אי-השויון $mx^2-4x^2\ln(x)<2$ מתקיים לכל $x\ge\frac{1}{2}$?

פתרון:

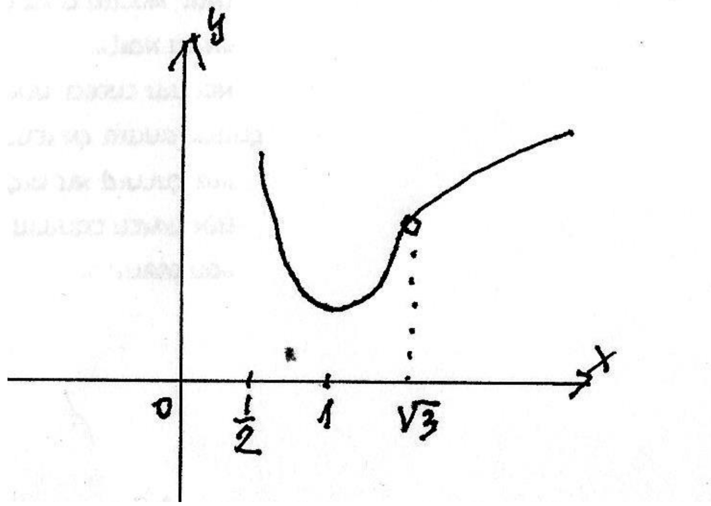
א. $y'=-\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x}$, $y'=0$ גורר $x=1$. $y'>0$ עבור $x>1$ ז"א הפונקציה עולה, $y'<0$ עבור $\frac{1}{2}\le x<1$, ז"א הפונקציה יורדת. לכן $(1,2)$ נקודת מינימום מקומי וגם מינימום מוחלט כי זאת נקודת קיצון יחידה.

ב' $y''=\frac{12}{x^4}-\frac{4}{x^2}$, $y''=0$ גורר $x^2=3$ ולכן $x=\sqrt{3}$. הנגזרת השנייה מחליפה סימן במעבר $x=\sqrt{3}$. לכן $\left(\sqrt{3},\frac{2}{3}+\ln 9\right)$ היא נקודת פיתול.

ג' עבור $x\ge\frac{1}{2}$ הפונקציה מוגדרת ורציפה ולכן אין אסימפטוטות המקבילות לציר ה- y .

בנוסף $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}+4\cdot\ln(x)\right)=\infty$ ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

ד' סקיצת הגרף:



ה' נחלק את שני האגפים של אי-השוויון $mx^2-4x^2\ln(x)<2$ ב- x^2 ונקבל אי-שויון שקול:

$\frac{2}{x^2}+4\cdot\ln(x)>m$, נעביר ישר $y=m$ המקביל לציר ה- x אזי הגרף של $y=\frac{2}{x^2}+4\cdot\ln(x)$ יהיה תמיד מעל הישר הזה אם ורק אם $m<2$.

4. א' יש לפתור את אי-השויון: $\cos^3 x+\sin^3 x<\cos x$ בקטע $0\le x\le 2\pi$

פתרון: $\sin^3 x<\cos x\left(1-\cos^2 x\right)$, $\sin^3 x-\cos x\sin^2 x<0$, $\sin^2 x\left(\sin x-\cos x\right)<0$

אי-שויון האחרון מתקיים בקטע הנתון כאשר $0<x<\frac{\pi}{4}$ או $\frac{5\pi}{4}<x<2\pi$

ב' יש למצוא את כל הערכים של x המקיימים את המשוואה: $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$

פתרון: תחום ההגדרה: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k$ כאשר $k=0,\pm1,\mp2,...$

$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$, לכן $(\cos x+\sin x)(1-\cos 2x)=0$

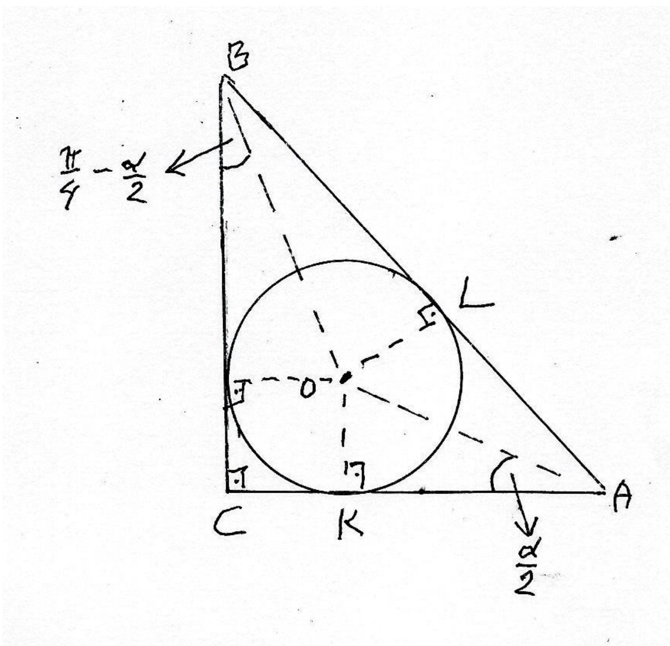
מכאן : $\tan x=-1$ או $\cos 2x=1$.

לסיכום: $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$ או $x=\pi k$

5. במשולש ישר זוית אחת הזויות החדות שווה ל- α .

א' יש למצוא את היחס בין רדיוס המעגל החסום   במשולש לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש

פתרון: נתבונן בציור:



נסמן ב- r רדיוס המעגל החסום, R רדיוס המעגל החוסם. $AL=r\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$, $BL=rctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$2R=AB=r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, מכאן $\frac{r}{R}=\frac{2}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

ב'   יש להוכיח כי $\sin(\varphi)+\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)\le 2$ לכל φ .

יש הרבה פתרונות נכונים. למשל ניתן לצטט   את המשפט: $a\sin(\varphi)+b\cos(\varphi)\le\sqrt{a^2+b^2}$

אפשר גם כך: אי-שויון $\sin(\varphi)+\sqrt{3}\cdot\cos(\varphi)\le 2$ שקול ל- $\sin(\varphi)+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos(\varphi)\le 2$

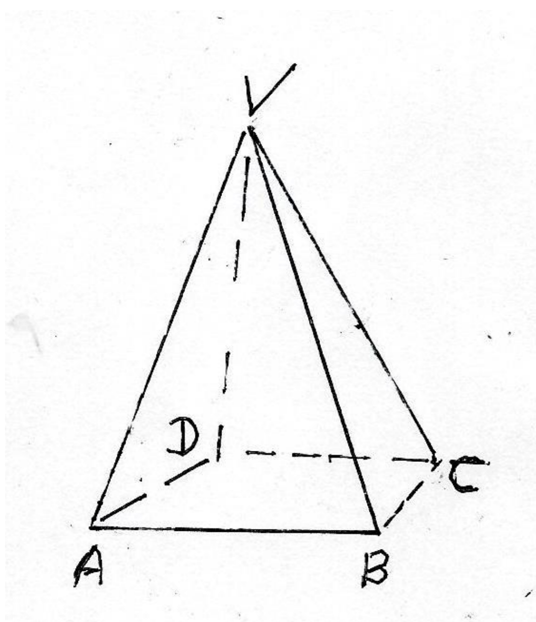
וזה שקול ל- $\cos\frac{\pi}{3}\sin(\varphi)+\sin\frac{\pi}{3}\cos(\varphi)\le 2\cdot\frac{1}{2}$ וזה שקול ל- $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ וזה נכון תמיד.

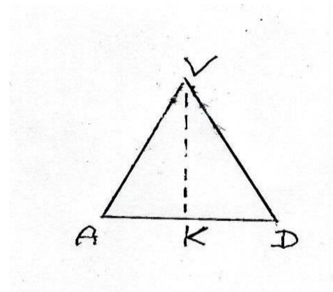
6. נתונה פירמידה $VABCD$ בעלת בסיס מלבני $ABCD$ כך ש-
$AD=BC=12\,,VA=VD==10\,,VB=VC=8$. הזוית בין המישור VAD לבין הבסיס היא 30^0 .

א' יש לחשב את נפח הפירמידה.

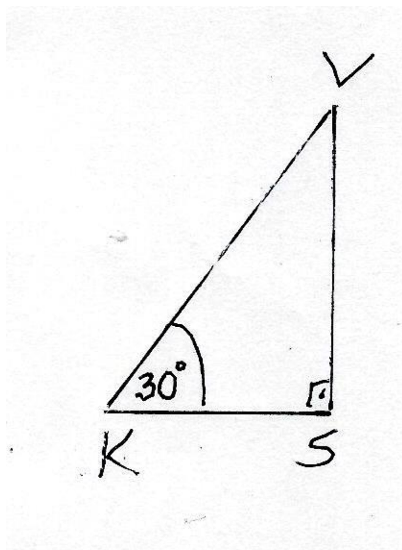
ב' יש לחשב את סינוס הזוית בין הישר VA לבין המישור $ABCD$.

פתרון: נתון: $AD=BC=12$, $VA=VD=10$, $VA=VC=8$. הזוית בין המישור VAD למישור הבסיס   שווה ל- 30^0 .



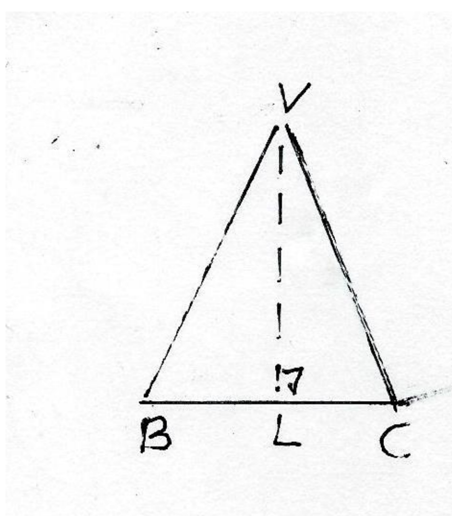


$KD=6\,,VA=10$, $VK=\sqrt{10^2-6^2}=8$. נעביר מקודקוד הפירמידה גובה VS לבסיס.



$VS=KV\cdot\sin 30^0=4$, $KS=KV\cdot\cos 30^0=4\cdot\sqrt{3}$

כעת נתבונן במשולש BCV :



$VL=\sqrt{8^2-6^2}=2\cdot\sqrt{7}$, $LC=6\,,VC=8$

משולש VSL ישר זווית, לכן $SL=\sqrt{VL^2-VS^2}=\sqrt{28-16}=2\cdot\sqrt{3}$

$KS+SL=KL=AB=CD=6\cdot\sqrt{3}$, נפח הפירמידה : $\frac{1}{3}\cdot AD\cdot AB\cdot VS=96\cdot\sqrt{3}$

ב' נחשב כעת את הזוית β בין המקצוע VA למישור הבסיס. המשולש VAS ישר זוית.

לכן: $\sin\beta=\frac{VS}{AV}=\frac{4}{10}$

7.נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כאשר הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. נתון : $2\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|$

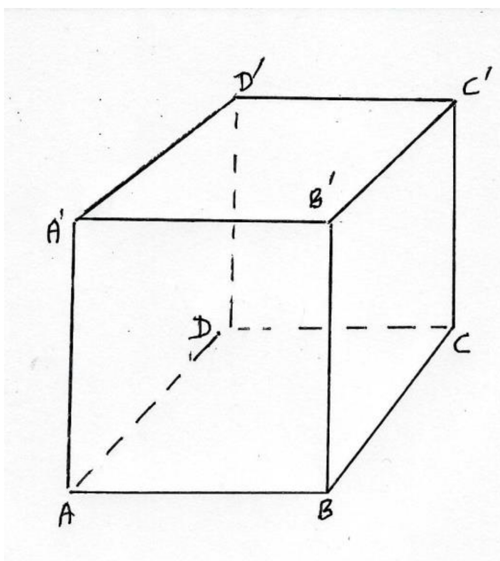
הפאה $DCC'D'$ נמצאת במישור $-3x+2y+6z+1=0$, נתון הקודקוד $A(4,-4,-5)$

א' יש למצוא משואת המישור העובר דרך הנקודות A,B,B',A'

ב' יש למצוא את הנקודה K הסימטרית לנקודה A ביחס למישור $-3x+2y+6z+1=0$

ג' יש למצוא נפח התיבה, כאשר נתון ש- .

פתרון:



א' המישור $ABB'A'$ מקביל למישור $DCC'D'$ לכן המשואה היא $-3x+2y+6z+R=0$

הנקודה A נמצאת עליו ולכן $-3\cdot(-3)+2\cdot1+6\cdot5+R=0$, מכאן $R=-41$

משואת המישור היא $-3x+2y+6z-41=0$

ב' נסמן ב- O את ההיטל של הנקודה A על המישור הנתון. כדי למצוא את השיעורים של O

נעביר ישר דרך הנקודה A המאונך למישור $-3x+2y+6z+1=0$

הצגתו הפרמטרית: $x=4-3t\ ,\ y=-4+2t\ ,\ z=-5+6t$ ונפגיש אותו עם המישור:

$-3(4-2t)+2(-4+2t)+6(-5+6t)+1=0$, נקבל $t=1$. נקבל $O(1,-2,1)$

ברור כי הנקודה O היא אמצע הקטע AK . לכן: $\frac{4+x_K}{2}=1$ מכאן $x_K=-2$

באותו אופן נקבל ש- $y_K=0\ ,\ z_K=7$ לסיכום: $K(-2,0,7)$

ג' נחשב את המרחק מ- A למישור $-3x+2y+6z+1=0$:

$d=\frac{\left|-3\cdot(-3)+2\cdot 1+6\cdot 5+1\right|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{42}{7}=6$, לכן צלע הבסיס : $|AB|=|AD|=6$

גובה התיבה: $|AA'|=12$. נפח התיבה: $6^2\cdot 12=432$

8. א' $p(x)$ הוא פולינום ממעלה גדולה מ- 2 . נתון ש- $p(x)$ מתחלק בלי שארית ב- $(x-1)$
כאשר מחלקים $p(x)$ ב- $(x-2)$ השארית היא 7 .
יש למצוא את השארית בחילוק של הפולינום $p(x)$ בפולינום x^2-3x+2

ב' לפונקציה $f(x)=\frac{\ln(x)}{x+a}$ יש נקודת קיצון $x=e$.
יש למצוא את הערך של a ולבדוק האם $f(x)$ עולה או יורדת עבור $x>e$?
בנוסף יש לחשב את האינטגרל $\int_1^e \frac{1-\ln(x)}{x^2}dx$

פתרון: א' נסמן: $p(x)=q(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)+Ax+B$

אזי ממשפט השארית נובע ש- $7=p(2)=2A+V$, $0=p(1)=A+B$

לכן $A=7\,,B=-7$. לסיכום: השארית היא $7x+7$

ב' $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x+a)-\ln x}{(x+a)^2}=\frac{1+\frac{a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}$, נתון ש- $f'(e)=0$, לכן נקבל $a=0$

לסיכום $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, ולכן $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. לכן עבור $x>e$ הפונקציה יורדת.

ברור מכאן ש- $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2}dx=\left(\frac{\ln x}{x}\right)_1^e=\frac{1}{e}$

9. נתונה סדרה גיאומטרית אינסופית מתכנסת: $1, \lg_{0.5}(x), \left(\lg_{0.5}(x)\right)^2, \left(\lg_{0.5}(x)\right)^3, \ldots$

עבור אילו ערכים של x מתקיים : $1+\lg_{0.5}(x)+\left(\lg_{0.5}(x)\right)^2+\left(\lg_{0.5}(x)\right)^3+\ldots<\frac{4}{3}$

פתרון: $q=\lg_{0.5} x$, נדרוש $x>0$, $-1<\lg_{0.5} x<1$, נקבל ת"ה : $0.5<x<2$

$\frac{4}{3}<\frac{1}{1-\lg_{0.5} x}$, מכאן נקבל $4\lg_{0.5} x<1$, ז"א $\lg_{0.5}\left(x^4\right)<\lg_{0.5} 0.5$, $x>\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

לסיכום: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}<x<2$

בסעיף א. דרשו שהטור יורד ולכן יש לדרוש $0<\lg_{0.5} x<1$