

מבחן אמר המתמטיקה (סימולציה מס' 2)

משק המבחן: 210 דקות .
אין להשתמש במחשבוני!!
אין לצאת ב- 45 הדקות האחרונות של המבחן.
יש לפתור אחת מהשאלות 1-2, שאלה 3 - חובה, שתיים מהשאלות 4-6,
ושתיים מהשאלות 7-9.
תיבדקנה רק התשובות הראשונות בכל מקרה של שאלות בחירה.
סעיפים שונים באותה שאלה אינם בהכרח שווים בניקודם.
חובה לנמק כל תשובה!

שאלה 1 (16%)

א. ההפרש בין המקדמים הבינומיאליים הנמצאים במקום השלישי בפיתוח $(a+b)^{n+1}$ ובפיתוח $(a+b)^n$

הוא 225. מה מס' האיברים הרציונאליים בפיתוח $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{y})^n$? (x ו-y רציונאליים)

ב. פתור את אי השוויון: $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{1 + \sqrt[4]{x}} \geq 9^{\sqrt{x}}$

שאלה 2 (16%)

נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{\frac{a}{x^2}}$

ידוע כי המרחק בין המשיקים העוברים בנקודות הקיצון של הפונקציה הוא $2\sqrt{2} \cdot e$.
מצא:

- א. את הפרמטר a .
ב. תחום ההגדרה.
ג. נקודות חיתוך עם הצירים.
ד. נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.
ה. נקודות פיתול ותחומי קעירות מעלה ומטה.
ו. האסימפטוטות.
ז. שרטט את גרף הפונקציה.
ח. נתונה הפונקציה $g(x)$ שמקיימת $g'(x) = f'(x)$. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(1) = 2e$.
מצא את משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = -1$ שעל הפונקציה.

שאלה 3 (20%) - שאלת חובה

נתונות שלוש נקודות: $A(0,0,0)$ $B(-1,k,1)$ $C(-1,7,-2)$.
k הוא פרמטר גדול מאפס. נתון כי $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.

- א. מצא את k .
ב. D נקודה במישור ABC כך שמתקיים $\overline{AC} \perp \overline{CD}$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר CD .
ג. נתונה הנקודה $S(8,-2,1)$. מצא את נפח הפירמידה SABC .
ד. מצא נקודה F הסימטרית לנקודה S ביחס למישור ABC .
ה. נתון הישר $\frac{x-5}{2} = -(y+4) = \frac{z-3}{5}$. מצא את קוסינוס הזווית בין הישר הנתון לישר CD .

שאלה 4 (16%)

א. נתונים שלושה ישרים מקבילים $a \parallel b \parallel c$ (b בין a לבין c).

על הישר a מסומנות m נקודות, על הישר b מסומנות 4 נקודות ועל הישר c מסומנות 3 נקודות, כך שאף 3 נקודות או יותר אינן נמצאות על אותו הישר (פרט לישרים a, b, c).

- מצא את m אם ניתן ליצור 324 משולשים ע"י חיבור 3 מתוך הנקודות הנ"ל.
(עזרה מספרית: $\sqrt{159201} = 399$, $84 \cdot 1764 = 148176$, $105^2 = 11025$).
- כמה ישרים שונים נוכל להעביר ע"י חיבור 2 מהנקודות הנתונות.

ב. בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) \text{ ו- } g(x) \text{ כאשר מתקיים: } f(x) = g'(x)$$

1. זהה איזה מן הגרפים הוא הגרף של

הפונקציה $f(x)$ ואיזה מהם הוא

גרף הפונקציה $g(x)$. נמק.

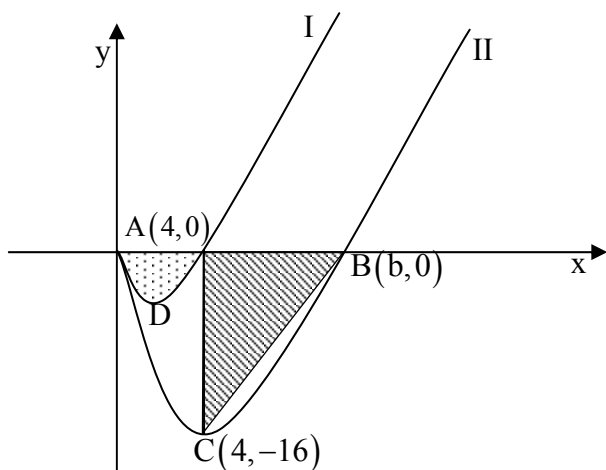
2. היעזר בנתונים המסומנים בסרטוט וחשב את השטח המנוקד.

3. נתון כי השטח המקווקו גדול פי $\frac{14}{9}$ מן

השטח המנוקד. מצא את b.

4. נתון כי: $g'(1) = -6$, $g''(1) = 0$. מצא את

שיעורי הנקודה D, נקודת המינימום של I.



שאלה 5 (16%)

א. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+6)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)3n} = \frac{1}{3n}$$

ב. נתונה המשוואה: $(m-1)\log_2^2(x) - (m-3)\log_2(x^2) + m^2 = 9$

- עבור אילו ערכים של m יש למשוואה שני פתרונות ממשיים שמכפלתם קטנה מ-2 וגדולה מ-1.
- עבור אלו ערכים של m אין למשוואה פתרון ממשי?

שאלה 6 (16%)

א. נתונה המשוואה $z^3 - 8 = 0$. חשב את הביטוי: $z_1(z_2 - 1) + z_2(z_3 - 1) + z_3(z_1 - 1) = ???$.

ב. מצא נקודה על הישר $y = \frac{1}{2}x$ שממנה רואים את הקטע שקצותיו $(-1, 0)$ ו- $(1, -1)$.

בזווית ראייה של 45°

ג. הוכח: אם a_1, a_2, \dots, a_n סדרה חשבונית ($a_1 \neq 0, d \neq 0$), אזי הפולינום

$$P(x) = \frac{x^n}{a_1 \cdot a_2} + \frac{x^{n-1}}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{x^2}{a_{n-1} \cdot a_n} - \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$$

מתחלק ללא שארית ב- $(x-1)$.

שאלה 7 (16%)

עמוד המאונך לקרקע וגובהו a מואר ע"י השמש.

ברגע מסוים הוא מטיל על הקרקע צל שאורכו a , ברגע אחר, אורך הצל $2a$ וברגע שלישי האורך $3a$.

הוכח כי סכום הזוויות שקרני השמש יוצרות עם הקרקע בשלושת המקרים הוא 90° .

שאלה 8 (16%)

פתור: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$

שאלה 9 (16%)

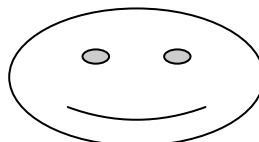
בפירמידה מרובעת משוכללת נתון כי הגובה H וכי זווית הראש של

פאה צדדית היא α .

א. לאלו ערכי α יש פתרון לבעיה? נמק.

ב. מצא את נפח הפירמידה לפי α, H , והוכח כי הוא שווה ל- $\frac{4H^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}$.

בהצלחה



צוות מורי מכינת הטכניון