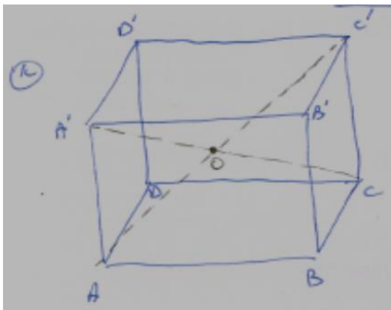
(א)



נסתכל על המרובע $ACC'A'$.

$AA' \parallel CC'$ (מקצועות צדדיות בתיבה)

$CC' = AA'$ (" " ")

$\Downarrow$

$ACC'A'$ מקבילית

$CC' \perp DC$ (תיבה)

$CC' \perp BC$

$\Downarrow$

$CC' \perp ABCD$ (ישר המאונך ל-2 ישרים שאינם מקבילים במישור מאונך למישור)

$\Downarrow$

$CC' \perp AC$ (CC' מאונך לכל ישר במישור הבסיס שעובר בעקבו)

$\Downarrow$

$ACC'A'$ מלבן

$\Downarrow$

$A'C$ ו- AC' אלכסונים במלבן $\Leftarrow$ חוצים זה את זה ונפגשים בנק' O

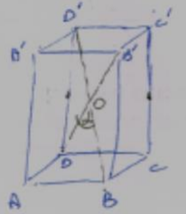
באותה דרך נסתכל על המרובע $ABC'D'$

נוכיח שהוא מלבן ולכן אלכסוניו חוצים זה את זה, וגם AC' ו- BD' נחצים.

ראינו ש- O זה אמצע AC' ולכן $D'B$ חייב לעבור דרך O (הוא חוצה את AC')

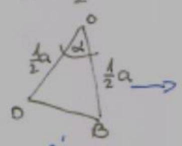
באותה דרך עובר האלכסון $B'D$ (נבחר מרובע $DCB'A'$...)

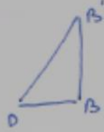
(ב)



$B'D = a$

$DO = \frac{1}{2}a$





משפט הקוסינוסים

$DB^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2\cdot\frac{1}{4}a^2\cos\alpha$

$OB^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\cos\alpha$

$DB^2 = AD^2 + AB^2 = 2AB^2$

ריבוע

$AB^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\cos\alpha$

$AB = \frac{a}{2}\sqrt{1-\cos\alpha} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$

$(2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha)$

$B'B^2 = B'D^2 - DB^2$

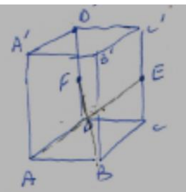
$B'B^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos\alpha$

$B'B^2 = \frac{a^2}{2}(1+\cos\alpha)$

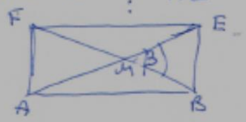
$B'B = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$

$V = AB\cdot AD\cdot B'D = AB^2\cdot B'D = \frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot a\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{4}$

(ג)



המרובע ABEF היא מלבן
(בדיוק ההוכחה של סעיף ג׳)
ולכן AE ו- BF אלכסונים במלבן



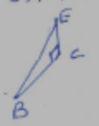
$$AE^2 = AC^2 + EC^2$$

$$AE^2 = (AB^2 + BC^2) + EC^2 = a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{B'B}{2}\right)^2 = a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = \frac{3a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2}{4}$$

$$AE = \frac{a}{2}\sqrt{3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$EM = AM = \frac{AE}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$



$$BE^2 = EC^2 + BC^2 = \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} + \frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2}{4}$$

$$BE = \frac{a}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

משפט הקוסינוסים ΔMBE

$$BE^2 = ME^2 + MB^2 - 2ME \cdot MB \cdot \cos\beta$$

$$BE^2 = 2ME^2 - 2ME^2\cos\beta$$

$$\frac{a^2}{4}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{a^2}{8}\left(3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) - \frac{a^2}{8}\left(3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)\cos\beta \quad / : \left(\frac{a^2}{8}\right)$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2 = 3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 - \left(3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}{3\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

נשים לב שהמונה שלילי, אם רוצים את הזווית החדה בין הישרים
ניקח בערך מוחלט של הביטוי.