3.65
4

$$\tan^2 x \cdot \tan^2 3x \cdot \tan 4x = \tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x$$

$$\tan 4x(\tan^2 x \tan^2 3x - 1) = (\tan x - \tan 3x)(\tan x + \tan 3x) \quad (*)$$

$$\tan 4x = \frac{(\tan x + \tan 3x)(\tan x - \tan 3x)}{\tan^2 x \tan^2 3x - 1}$$

תחום הגדרה

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

$4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k$

$$\tan 4x = \frac{(\tan x - \tan 3x)(\tan x + \tan 3x)}{(\tan x \tan 3x + 1)(\tan x \tan 3x - 1)}$$

$$\tan 4x = \frac{(\tan x + \tan 3x)}{-(1 - \tan x \tan 3x)} \cdot \frac{(\tan x - \tan 3x)}{1 + \tan x \tan 3x}$$

נשתמש בזהויות:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 4x = -\tan 4x \cdot \tan(-2x)$$

$$\tan 4x(1 + \tan(-2x)) = 0$$

↓

$4x = \pi k$

(**) $\boxed{x = \frac{\pi k}{4}}$

↓

$1 - \tan 2x = 0$

$\tan 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$ (crossed out)

תחום הגדרה

נחזור ל- (*) ונבדוק האם הלקנו ב-0 מבטני פתרונות

$$0 = \tan^2 x \tan^2 3x - 1$$

$$0 = (\tan x \tan 3x - 1)(\tan x \tan 3x + 1)$$

$\tan x \tan 3x = 1 \;/ : \tan x \neq 0$

$\tan 3x = \frac{1}{\tan x}$

$\tan 3x = \cot x$

$\tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$3x = \frac{\pi}{2} - x + \pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ (crossed out) תחום הגדרה

→

$\tan x \tan 3x = -1$

$\tan 3x = \frac{-1}{\tan x} = -\cot x$

$\tan 3x = -\tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$\tan 3x = \tan(x - \frac{\pi}{2})$

$3x = x - \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

נכלל בפתרון (**)

פתרון:

$$x = \frac{k\pi}{4}$$

נבדוק את תחום ההגדרה $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

נבין הפתרון

$$x = k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right\}$$