נסמן את מהירות המכונית ב- x ואת מהירות המשאית ב- y

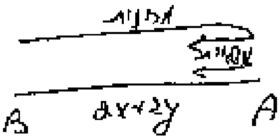
דרך	זמן	מהירות		
$2x$	2	x	מכונית	עד הפגישה הראשונה
$2y$	2	y	משאית	

נמצא שהמרחק בין A ל- B הוא $2x+2y$.

דרך	זמן	מהירות		
$4\frac{2}{3}x$	$4\frac{2}{3}$	x	מכונית	עד הפגישה השנייה
$4\frac{2}{3}y$	$4\frac{2}{3}$	y	משאית	

מכיון שהמכונית עברה את כל המרחק בין B ל- A, ויצאה שוב מ- A נשווה את המרחק מ- A שעברה המכונית למרחק שעברה המשאית

$$4\frac{2}{3}x-(2x+2y)=4\frac{2}{3}y$$
$$2\frac{2}{3}x=6\frac{2}{3}y$$
$$\boxed{x=2\frac{1}{2}y}$$



דרך	זמן	מהירות	
(*) $-\frac{2}{3}x+4y+40$		x	מכונית
(**) $2x-40-2\frac{2}{3}y$		y	משאית

(*) הדרך שעשתה המכונית בין הפגישה השנייה והשלישית

$$\underbrace{2x+2y}_{\text{כל הדרך בין A ל-B}}-\underbrace{\left(4\frac{2}{3}x-(2x+2y)\right)}_{\text{הקטע מ-A שעברה עד הפגישה השנייה}}+\underbrace{40}_{\text{המרחק מ-B שהמכונית עברה עד הפגישה השלישית}}$$

(**) המשאית עברה

$$\underbrace{2x+2y}_{\text{כל הדרך}}-\underbrace{40}_{\text{מה שנשאר לה עד B}}-\underbrace{4\frac{2}{3}y}_{\text{מה שעברה עד הפגישה השנייה}}$$

מכיוון שזמני הנסיעה של המכונית והמשאית שווים:

$$\frac{-\frac{2}{3}x+4y+40}{x}=\frac{2x-40-2\frac{2}{3}y}{y}$$

$$\frac{2\frac{1}{3}y+40}{2\frac{1}{2}y}=\frac{2\frac{1}{3}y-40}{y}$$ נציב $x=2\frac{1}{2}y$

$$2\frac{1}{3}y^2+40y=5\frac{5}{6}y^2-100y$$
$$140y=3\frac{1}{2}y^2$$
$$y\neq 0,\ \boxed{y=40}$$

2. **א.**

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2+2(n-1)\right] = n^2$$

הנוסחה לסכום סדרה חשבונית לפי נתוני השאלה:

$n=1 \qquad S_1 = 1^2 = 1 \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)$

$n=k$ הנחת האינדוקציה עבור $\qquad S_1+S_2+\dots+S_k = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

$n=k+1$ הוכחת טענת האינדוקציה עבור

$$\underbrace{S_1+S_2+\dots+S_k}+S_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+S_{k+1} = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right] = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(2k+3)(k+2)$$

ב. נשים לב שבסדרה יש איברים במקומות האי-זוגיים שכולם שווים זה לזה ואיברים במקומות הזוגיים שכולם שווים זה לזה.
כדי למצוא את b_{20} נמצא גם את b_{19}.

$$4\frac{1}{2} = b_{19}+b_{20} = b_{19}+\frac{b_{19}}{b_{19}-1} = \frac{b_{19}^2-b_{19}+b_{19}}{b_{19}-1} = \frac{b_{19}^2}{b_{19}-1} \qquad / \, b_{19}-1$$

$$4\frac{1}{2}b_{19} - 4\frac{1}{2} = b_{19}^2$$

$$0 = b_{19}^2 - 4\frac{1}{2}b_{19} + 4\frac{1}{2} \longrightarrow b_{19} = 3 \;,\; \cancel{b = 1\frac{1}{2}}$$

$$b_{20} = \frac{b_{19}}{b_{19}-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{b_{10} = 1\frac{1}{2}}$$

3.

		לא קונה	קונה
$(0.2)\ X$	מבוגר	$\frac{1}{2}X(0.1)$	$\frac{1}{2}X(0.1)$
(0.8)	צעיר	0.2	0.6
		0.3	0.7

נסמן את אחוז המבוגרים שהשתתפו בסקר ב- X.
50% מהמבוגרים קונים (לכן 50% לא קונים)

$$P(\text{צעיר} \mid \text{לא קונה}) = \frac{P(\text{צעיר} \cap \text{לא קונה})}{P(\text{לא קונה})} = \frac{2}{3}$$

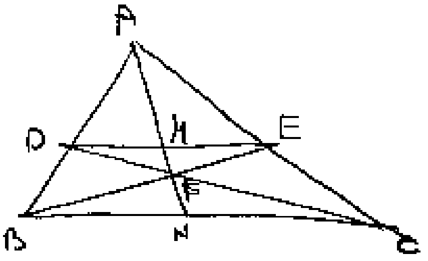
$$= \frac{0.2}{P(\text{לא קונה})} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\text{לא קונה}) = 0.3$$

נמלא את הטבלה

(א) $\text{צעירים} = 0.8\cdot 2000 = 1600$

(ב) $0.6\cdot 2000 = 1200$

4.



(א)

(ז.ז) $\Delta ADM \sim \Delta ABN$

$$\frac{DM}{BN} = \frac{AM}{AN}$$

(ז.ז) $\Delta AME \sim \Delta ANC$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{ME}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$$

(ב)

(ז.ז) $\Delta DMF \sim \Delta NFC$

$$\frac{DM}{NC} = \frac{MF}{NF}$$

(ז.ז) $\Delta MEF \sim \Delta NBF$

$$\frac{ME}{BN} = \frac{MF}{NF}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{NC} = \frac{ME}{BN}$$

(ג) נחלק את סעיף א בסעיף ב ונקבל

$$\frac{DM}{EM} = \frac{EM}{DM} \Rightarrow DM^2 = EM^2$$

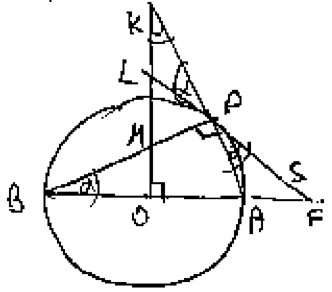
$\boxed{DM = EM}$

נחזור לסעיף א ונציב את $DM=EM$ ונקבל:

$$\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$$

$$\frac{\cancel{DM}}{BN} = \frac{\cancel{DM}}{CN} \Rightarrow \boxed{CN = BN}$$

5.



(א)

נסמן $\sphericalangle SPA = \alpha$

(קודקודיות) $\sphericalangle KPL = \sphericalangle SPA = \alpha$

(זווית בין משיק למיתר שווה להיקפית הנשענת על אותו מיתר) $\sphericalangle PBA = \sphericalangle SPA = \alpha$

(משלימה ל-$180°$ במשולש ABP) $\sphericalangle BAK = 90 - \alpha$

(משלימה ל-$180°$ במשולש AKO) $\sphericalangle AKO = \alpha$

$\Downarrow$

$\boxed{KL = LP} \Leftarrow$ שו"ש ΔKLP

(משלימה ל-$180°$ במשולש BMO) $\sphericalangle BMO = 90 - \alpha$

(קודקודיות) $\sphericalangle LMP = \sphericalangle BMO = 90 - \alpha$

(משלימה את $\sphericalangle KPL$ ל-$90°$) $\sphericalangle MPL = 90 - \alpha$

שו"ש ΔKLP $\Downarrow$ $\boxed{LP = LM}$

$\boxed{KL = LM} \Leftarrow$

(ב)

$$\cos \sphericalangle B = \frac{BP}{BA} = \frac{24}{26} \Rightarrow \boxed{\sphericalangle B = 22.62}$$

$$\sphericalangle BPF = \sphericalangle BPA + \sphericalangle FPA = 90 + 22.62 = 112.62$$

$$\sphericalangle F = 180 - 112.62 - 22.62 = 44.76$$

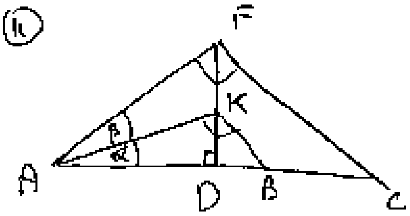
משפט הסינוסים ב- ΔBPF

$$\frac{BP}{\sin \sphericalangle F} = \frac{BF}{\sin \sphericalangle BPF}$$

$$BF = \frac{24}{\sin 44.76} \cdot \sin 112.62 = 31.46$$

$$AF = BF - BA = 31.46 - 26 = 5.46$$

6. (א)



מעגל החוסמים:

$$2R=\frac{AF}{\sin\angle C}=\frac{AF}{\sin(90-\alpha-\beta)}=\frac{AF}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{AF=2R\cos(\alpha+\beta)}$$

$$2r=\frac{AK}{\sin\angle B}=\frac{AK}{\sin(90-\alpha)}=\frac{AK}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{AK=2r\cos\alpha}$$

נמצא עוד: מעגל החוסם ל- משולש AFK

$\angle AKF=90+\alpha$ (חיצונית ל- $\triangle ADK$)

$\angle AFD=90-\alpha-\beta$

$$\frac{AF}{\sin\angle AKF}=\frac{AK}{\sin\angle AFD}$$

$$\boxed{\frac{AF}{AK}}=\frac{\sin\angle AKF}{\sin\angle AFD}=\frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(90-\alpha-\beta)}=\boxed{\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

נציב ב- AF ו- AK שמצאנו בהתחלה

$$\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{AF}{AK}=\frac{\cancel{2}R\cos(\alpha+\beta)}{\cancel{2}r\cos\alpha}\longrightarrow\frac{R}{r}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$$

(ב)

נסמן ב- $\bar{R}$ את רדיוס המעגל החוסם את משולש AKF

$$2\bar{R}=\frac{AF}{\sin\angle AKF}=\frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\sin(90+\alpha)}=\frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$$

$$\frac{R}{r}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$$ ראינו בסעיף א

$$\Leftarrow\quad\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{r}{R}}$$

$$\cancel{2}\bar{R}=\cancel{2}R\cdot\sqrt{\frac{r}{R}}$$

$$\boxed{\bar{R}=\sqrt{R}\sqrt{r}}$$

7

.א

1) $\sqrt{2x}-2\neq 0 \longrightarrow \sqrt{2x}\neq 2 \longrightarrow 2x\neq 4 \longrightarrow \boxed{x\neq 2}$

$2x\geq 0 \longrightarrow x\geq 0$

תחום הגדרה $x\neq 2$, $x\geq 0$.

2) אסימפטוטה אנכית $x=2$, אין אסימפטוטה אופקית

3) חיתוך עם ציר ה-x: $f(0)=\frac{0}{-2}=0$ $(0,0)$

חיתוך עם ציר ה-y: $0=\frac{x}{\sqrt{2x}-2} \longrightarrow x=0$ (אותה נק')

4) $f'(x)=\dfrac{(\sqrt{2x}-2)-\frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}-2)^2} = \dfrac{2(2x)-4\sqrt{2x}-2x}{2\sqrt{2x}(\sqrt{2x}-2)^2} = \dfrac{2x-4\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}(\sqrt{2x}-2)^2}$

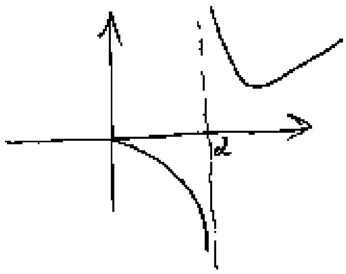
$f'=0=\sqrt{2x}(\sqrt{2x}-4) \longrightarrow x=0$ $\max(0,0)$

$x=8$ $\min(8,4)$

x	2	8	$12\frac{1}{2}$
y'	−		+
y	↘	min	↗

(0,0) היא נק' קצה
לכן נשווה אותה לנק' סמוכה
ונגלה שהיא מקס

5)



ב.

מסעיף 5 ניתן לראות:

f שלילית בין $0<x<2$, והיא יורדת לכן המכפלה שלה עם שלילית

$g'=f'\cdot f$

לכן בתחום $0<x<2$ המכפלה של g' חיובית ו-g עולה.

ב $x>8$ f חיובית ועולה לכן f ו-f' חיוביות $0<g'$ $g'>0$

לכן ב $x>8$ g עולה.

עבור $2<x<8$ f חיובית ויורדת לכן f חיובית f' שלילית
g' שלילית ולכן g יורדת.

לסיכום: עולה $0<x<2$, $x>8$

יורדת $2<x<8$

8. א

המכנה תמיד חיובי (הגדרת שורש)

נבדוק את המונה: cos חיובי: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

שלילי: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

מכיוון ש- a חיובי ויש מינוס (-) לפני המונה.

מתקבל (התשובה בתחום השאלה):

$f<0 \quad -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

$f>0 \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$

ב

$u=\sqrt{16\sin x+9}$

$du=\frac{16\cos x}{2\sqrt{16\sin x+9}}dx$

גבולות האינטגרל

$x=-\frac{\pi}{6} \longrightarrow u=-1$

$x=\frac{7\pi}{6} \longrightarrow u=1$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)dx=\int_{-1}^{1}-2a\,du=\overset{(*)}{-2au}\Big|_{-1}^{1}=(-2a)-(-2a(-1))=0$$

ג

נפרק את ה: לשני אינטגרלים

פעם f מתחת לציר ה-x

ופעם היא מעליו (ראה סעיף א)

$$8=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}[0-f(x)]dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{7\pi/6}f(x)dx=$$

לפתרון האינטגרל נשתמש בסעיף ב עם שלב (*)

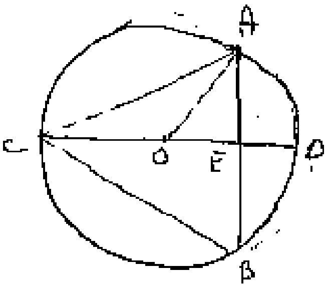
$$=2a\sqrt{16\sin x+9}\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2}+\left(-2a\sqrt{16\sin x+9}\Big|_{\pi/2}^{7\pi/6}\right)=$$

$$=2a(5-1)+(-2a)(1-5)=16a$$

$8=16a$

$\boxed{a=\frac{1}{2}}$

9.



(צ.צ.צ) $\triangle ACE \cong \triangle BEC$

לכן $S_{ACE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

נסמן את $OE = x$

פיתגורס $\triangle AOE$:

$$R^2 = AE^2 + OE^2$$

$$AE = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S_{ACE} = \frac{\sqrt{R^2-x^2}\cdot(R+x)}{2}$$

נגזור כדי למצוא מקס:

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}(R+x) + \sqrt{R^2-x^2}\right)$$

$$f' = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x(R+x)+2(R^2-x^2)}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right) = \frac{-2xR-2x^2+2R^2-2x^2}{2\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$0 = -2xR - 4x^2 + 2R^2$$

$$2x^2 + xR - R^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-R\pm\sqrt{R^2+8R^2}}{4} = \frac{-R\pm 3R}{4} = \begin{cases} \cancel{-R} \\ \frac{1}{2}R \end{cases}$$

x	$\frac{1}{3}R$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{2}{3}R$
y'	+		−
y	↗	max	↘

לכן $x = \frac{1}{2}R$ הוא נק' max

השטח המקס' הוא:

$$S_{ABC} = 2S_{ACE} = \cancel{2}\frac{\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2}\,(R+\frac{1}{2}R)}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot 1\frac{1}{2}R = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}$$