1. (א) נסמן את הזמן עד ההפסקה ב- t

	קצב לשעה	זמן שעות	סה"כ מ"ק
לפני ההפסקה:	$\frac{10}{t}$	t	10
הפסקה:	—	$\frac{1}{3}$	—
אחרי ההפסקה:	$\frac{10}{t}+3$	$\frac{20}{\frac{10}{t}+3}$	20

$$\frac{30}{\frac{10}{t}} = t + \frac{1}{3} + \frac{20}{\frac{10}{t}+3}$$

$$\frac{30t}{10} = t + \frac{1}{3} + \frac{20}{\frac{10+3t}{t}} = t + \frac{1}{3} + \frac{20t}{10+3t}$$

$$3t = t + \frac{1}{3} + \frac{20t}{10+3t} \longrightarrow 2t = \frac{1}{3} + \frac{20t}{10+3t}$$

$$6t(10+3t) = 10 + 3t + 60t$$

$$60t + 18t^2 = 10 + 63t$$

$$18t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$t = \frac{5}{6} \quad , \quad t = -\frac{2}{3}$$

ולכן הזמן עד ההפסקה הוא $\frac{5}{6}$ השעה - 50 דקות.

(ב) קצב של $\frac{10}{\frac{5}{6}}$ זה 12 מ"ק לשעה. ב- 18 שעות צינור ממלא 216 מ"ק, כך שיש בבריכה עוד 648 מ"ק לקבלת הבריכה.

2 צינורות ממלאים בקצב שבין $12 \cdot 2 = 24$ מ"ק ל- $15 \cdot 2 = 30$ מ"ק.

לכן כדי למלא את הבריכה יקח בין $\frac{648}{24} = 27$ שעות

ל- $\frac{648}{30} = 21.6$ שעות.

2. (א) נפרק את המחובר לפי הנוסחה הנתונה:

$$\frac{15}{1^2\cdot 4^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2}$$

$$\frac{33}{4^2\cdot 7^2}=\frac{1}{4^2}-\frac{1}{7^2}$$

$$\frac{51}{7^2\cdot 10^2}=\frac{1}{7^2}-\frac{1}{10^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{18n-3}{(3n-2)^2(3n+1)^2}=\frac{1}{(3n-2)^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}$$

כשנחבר את הצד השמאלי נקבל את מה שמופיע בשאלה

כשנחבר את הצד הימני נקבל

$$1-\frac{1}{(3n+1)^2} \Leftarrow \frac{1}{1^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}$$

(שימו לב שכל השאר מתקזזים בחיבור).

(ב) נראה עבור $n=k+1$

$$\underbrace{\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\dots+\frac{18k-3}{(3k-2)^2(3k+1)^2}}+\frac{18k+15}{(3k+1)^2(3k+4)^2}\overset{?}{=}1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

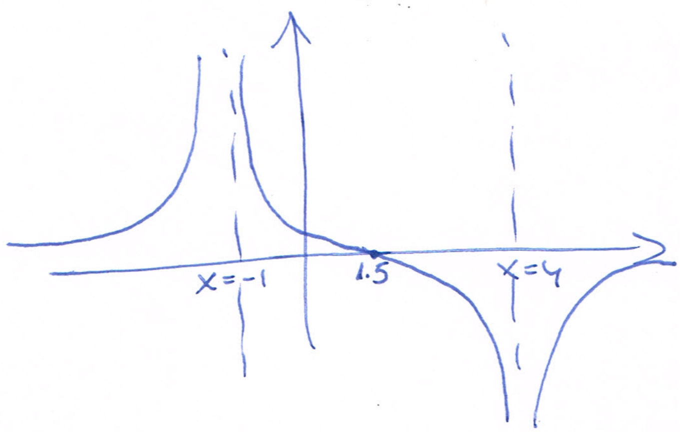
$$1-\frac{1}{(3k+1)^2}+\frac{18k+15}{(3k+1)^2(3k+4)^2}\overset{?}{=}1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$1-\frac{1}{(3k+1)^2}\left[1-\frac{18k+15}{(3k+4)^2}\right]=$$

$$1-\frac{1}{(3k+1)^2}\left[\frac{9k^2+24k+16-18k-15}{(3k+4)^2}\right]=$$

$$1-\frac{1}{(3k+1)^2}\left[\frac{9k^2+6k+1}{(3k+4)^2}\right]=1-\frac{1}{\cancel{(3k+1)^2}}\cdot\frac{\cancel{(3k+1)^2}}{(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

.3 (א) (1)



(2) מהגרף ניתן לראות שלפונ' יש פיתול (מחליף סימן)
כלו' $f''=0$,
אם ל- f' יש נקודת קיצון אז הנגזרת
שלה f'' צריכה להיות שווה לאפס.
את זה הוכחנו עכשיו.
הפונ' עוברת מקעורה כלפי מעלה $f''>0$ לקעורה כלפי מטה $f''<0$
כלו' ש- f' בנקודת הקיצון היא מהצורה $\nearrow\searrow$ של max.

(ב) נציב $(1.5,0)$ בפונ'

$$0=\frac{3a-4.5b}{(1.5^2-1.5a+c)^2}$$

$$0=3a-4.5b \longrightarrow \boxed{a=1.5b}$$

עבור $x=4$ $x=-1$ המכנה מתאפס.

$$0=(-1)^2+a+c=1+a+c \longrightarrow c=-1-a$$
$$0=4^2-4a+c=16-4a+c \longrightarrow c=4a-16$$

$$-1-a=4a-16$$
$$15=5a$$
$$\boxed{a=3}$$

$$\boxed{c=-4} \longleftarrow \boxed{b=4.5} \longleftarrow$$

$$f(x=-2)=\frac{3\cdot3-3\cdot4.5\cdot(-2)}{((-2)^2+2\cdot3-4)^2}=\frac{9+27}{(4+6-4)^2}=\frac{36}{36}=1$$

$$(-2,1)$$

4. (א) $f(x=0) = 4\sin^2 0 \cdot \cos^2 0 = 0$ $\quad (0,0)$

$0 = 4\sin^2 x \cos^2 x$ $\qquad$ בתחום שלנו: $(\pi,0)$ $(0,0)$

$\sin x = 0 \longrightarrow x = \pi k$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\qquad (\frac{\pi}{2}, 0)$

(ב) $f(x) = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 4\sin^4 x$

$f'(x) = 4\cdot 2\sin x\cos x - 4\cdot 4\sin^3 x\cos x$

$f'(x) = 0$ $\qquad$ בנקודת הקיצון

$0 = 8\sin x\cos x - 16\sin^3 x\cos x = 8\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$

$\sin x = 0 \longrightarrow x = \pi k$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

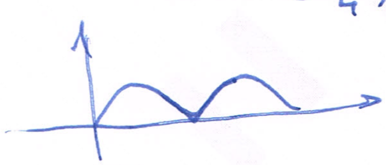
$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

בדקו ש: $\quad$ min $(0,0)$ $\quad$ min $(\frac{\pi}{2}, 0)$

max $(\frac{\pi}{4}, 1)$ $\quad$ max $(\frac{3\pi}{4}, 1)$

(ג)



(ד) $\quad 8\sin^2 x\cos^2 x = 2f(x)$

מהציור ניתן לראות ש f נמצאת $\quad 0 \le f(x) \le 1$

ולכן $\quad 0 \le 2f(x) \le 2$

נשאר להראות ש- f מחזורית עם מחזור π

$f(x+\pi) = 4\sin^2(x+\pi)\cdot\cos^2(x+\pi) =$

$= 4\sin^2(\pi-(x+\pi))\cdot[\cos(\pi-(x+\pi))]^2$

$= 4\sin^2(-x)\cdot(-\cos(-x))^2 = 4(-\sin x)^2\cdot(-\cos x)^2$

$= 4\sin^2 x\cos^2 x$

ולכן לכל x מתקיים $\quad 0 \le 8\sin^2 x\cos^2 x \le 2$

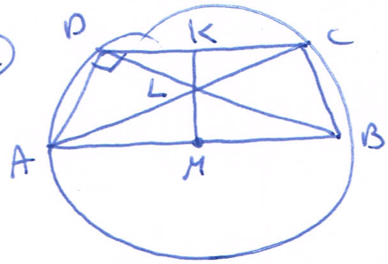
ה (1) $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot 4\cos 4x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 2x=$

$=(2\sin x\cos x)^2=4\sin^2 x\cos^2 x$

(2) $\int_0^{\pi} f(x)dx=g(\pi)-g(0)=\frac{1}{2}\cdot\pi-0=\frac{\pi}{2}$

.5 א



$90^\circ=\measuredangle KMB$ הראנו ב ב'

$\triangle DKL\sim\triangle LMB$ (זוויות, זוויות)

$AL=LB$ הראנו ב ב'

$\measuredangle DAL=\measuredangle DAB-\measuredangle LAB=\alpha-(90-\alpha)=2\alpha-90$

$\sin\measuredangle DAL=\sin(2\alpha-90)=\frac{DL}{AL}\ \rightarrow\ DL=LA\cdot\sin(2\alpha-90)$

$DL=AL\cdot\sin(2\alpha-90)=-AL\sin(90-2\alpha)=-AL\cos 2\alpha$

בגלל הדמיון בין המשולשים $\triangle DKL\sim\triangle LMB$

$\frac{LK}{LM}=\frac{DL}{LB}=\frac{-AL\cos 2\alpha}{LB}=\frac{-AL\cos 2\alpha}{LA}=-\cos 2\alpha$

ב $\frac{LK}{LM}=-\cos 2\alpha=-\cos 120=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ LM=2LK$

$S_{DMC}=\frac{MK\cdot DC}{2}=\frac{(LM+KL)DC}{2}=\frac{3KL\cdot DC}{2}=3\cdot S_{DLS}$

$=3S$ $(MK\perp DC$ הראנו ב$)$