1. (א)

נסמן את הזמן עד ההפסקה - t

	קצב לשעה	זמן שעות	סה"כ מ"ק
לפני ההפסקה:	$\frac{10}{t}$	t	10
הפסקה:	—	$\frac{1}{3}$	—
אחרי ההפסקה:	$\frac{10}{t}+3$	$\frac{20}{\frac{10}{t}+3}$	20

$$\frac{30}{\frac{10}{t}} = t+\frac{1}{3}+\frac{20}{\frac{10}{t}+3}$$

$$\frac{30t}{10} = t+\frac{1}{3}+\frac{20}{\frac{10+3t}{t}} = t+\frac{1}{3}+\frac{20t}{10+3t}$$

$$3t = t+\frac{1}{3}+\frac{20t}{10+3t} \longrightarrow 2t=\frac{1}{3}+\frac{20t}{10+3t}$$

$$6t(10+3t)=10+3t+60t$$

$$60t+18t^2=10+63t$$

$$18t^2-3t-10=0$$

$$t=\frac{5}{6} \quad , \quad t=-\frac{2}{3}$$

לכן הזמן עד ההפסקה הוא $\frac{5}{6}$ השעה - 50 דקות.

(ב)

קצב של $\frac{10}{\frac{5}{6}}$ זה 12 מ"ק לשעה. ב- 18 שעות צינור ממלא 216 מ"ק, זה שיש בבריכה עוד 648 מ"ק קיבול הבריכה.

2 צינורות ממלאים בקצב שבין $12\cdot2=24$ מ"ק ל: $15\cdot2=30$ מ"ק.

לכן כדי למלא את הבריכה יקח בין $\frac{648}{24}=27$ שעות

ל $\frac{648}{30}=21.6$ שעות.

.2 (א)

נראה עבור $n=k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{a_1 \cdot b_1}+\frac{1}{a_2 \cdot b_2}+\dots+\frac{1}{a_n \cdot b_n}}+\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}} \overset{?}{=} \frac{n+1}{2(3n+5)}$$

$$\frac{n}{2(3n+2)}+\frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \overset{?}{=} \frac{n+1}{2(3n+5)}$$

a_n סדרה חשבונית

$2=a_1$

$3=d$

$a_n=2+3(n-1)$

$=3n-1$

b_n סדרה חשבונית

$5=b_1$

$3=d$

$b_n=5+3(n-1)$

$=3n+2$

$$\frac{1}{3n+2}\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{3n+5}\right]=$$

$$\frac{1}{3n+2}\left(\frac{3n^2+5n+2}{2(3n+5)}\right)=$$

$$\frac{1}{\cancel{3n+2}}\cdot\frac{\cancel{(3n+2)}(n+1)}{2(3n+5)}=\frac{n+1}{2(3n+5)}$$

(ב)

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\dots+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=$$

$$\left(\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\dots+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}\right)-\left(\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\dots+\frac{1}{a_n\cdot b_n}\right)=$$

לפי הנוסחא שהוכחנו בסעיף א

$$\frac{2n}{2(6n+2)}-\frac{n}{2(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+1)}-\frac{n}{2(3n+2)}=\frac{n(3n+2-3n-1)}{2(3n+1)(3n+2)}=$$

$$\frac{n}{2(3n+1)(3n+2)}$$

=

$$\frac{n}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}=\frac{n}{(3n+2)(3(2n+1)-1)}=\frac{n}{(3n+2)(6n+2)}$$

מצד שני

נשווה ?

3. (א)

יש 2 אפשרויות: א) 2 לבנים בכד אחד ושחור בכד השני

ב) לבן ושחור בכד אחד ולבן בכד השני

נחשב את ההסתברות להוצאת לבן בשני המקרים:

מקרה א

$$P(\text{לבן}) = P\left(\begin{matrix}\text{לבן}\\ \text{מכד}\\ \text{ראשון}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{לבן}\\ \text{מכד}\\ \text{שני}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 + 0 = \frac{1}{2}$$

מקרה ב

$$P(\text{לבן}) = P\left(\begin{matrix}\text{לבן}\\ \text{מכד}\\ \text{ראשון}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{לבן}\\ \text{מכד}\\ \text{שני}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

לכן מקרה ב הוא המתאים.

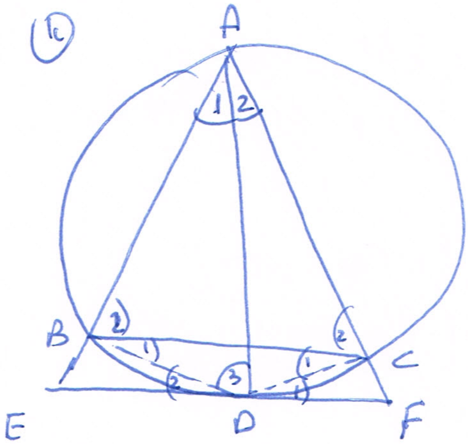
(ב)

(1) $$P\left(\begin{matrix}\text{פעמיים}\\ \text{לבן}\end{matrix}\right) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$$

(2) כי ב-5 פעמים הראשונות הוצאו 2 כדורים לבנים (חשבתי
את ההסתברות הזאת מקודם) ובשישי לבן.

$$P\left(\begin{matrix}\text{3 לבן}\\ \text{אחד מהם}\\ \text{בנסיון השישי}\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{מתוך 5}\\ \text{נסיונות}\\ \text{2 לבנים}\end{matrix}\right)\cdot P\left(\begin{matrix}\text{לבן}\\ \text{בשישי}\end{matrix}\right) = \frac{216}{625}\cdot\frac{2}{5} = \frac{432}{3125}$$

4. א



נתון: $\angle A_1 = \angle A_2$

$\Downarrow$

$BD = DC$ (מול זוויות היקפיות שוות יש מיתרים שווים)

$\Downarrow$

$\angle C_1 = \angle B_1$ (על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות)

$\angle D_1 = \angle A_2$

$\angle D_2 = \angle A_1$ (זווית בין משיק למיתר שווה להיקפית הנשענת על אותו מיתר)

$\angle B_1 = \angle A_2$ (היקפיות הנשענות על אותו מיתר)

$\Downarrow$

$\angle B_1 = \angle A_2 = \angle A_1 = \angle D_2$

$\angle B_1 = \angle D_2$

$\Downarrow$

$BC \parallel EF$ (זוויות מתחלפות)

ב

$\angle A_1 = \angle D_1$ (מסעיף קודם)

$\triangle ABD$: $\angle D_3 = 180 - \angle A_1 - \angle B_1 - \angle B_2 = 180 - 2\angle A_1 - \angle B_2$

$\triangle ABC$: $\angle C_2 = 180 - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle B_2 = 180 - 2\angle A_1 - \angle B_2$

$\angle C_1 + \angle C_2 = \angle D_1 + \angle F$ (חיצונית $\triangle DCF$)

$\angle A_1 = \angle C_1 = \angle D_1 \Leftrightarrow$ ראינו

$\angle A_1 + 180 - 2\angle A_1 - \angle B_2 = \angle A_1 + \angle F$

$\angle F = 180 - 2\angle A_1 - \angle B_2$

$\Rightarrow \boxed{\angle F = \angle D_3} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle DCF$ (זווית, זווית)

ג

מכיוון שהוכחנו בסעיף א' ש $\angle B_1 = \angle C_1$ לכן $BD = DC$

מהדמיון בסעיף ב' נובע:

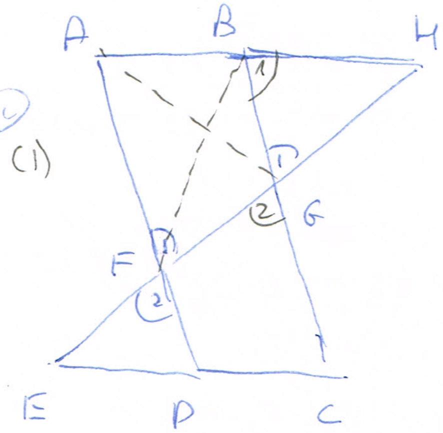
$$\frac{AB}{DC} = \frac{AD}{DF}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow AB \cdot DF = BD \cdot AD$$

5:

(א)

(1)



$\angle E = \angle H$ (מתחלפות)

$\angle G_1 = \angle F_1$ (מתאימות)

$\angle F_1 = \angle F_2$ (קודקודיות)

$\Downarrow$

$\angle G_1 = \angle F_2$

$\Downarrow$

$\triangle BGH \sim \triangle DFE$ (זוויות, זוויות)

$\Downarrow$

$$\frac{BH}{GH} = \frac{ED}{EF} = 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{ED}{BH} = \frac{EF}{GH}$$

$$\boxed{BH = GH}$$

(2)

$BH = GH$ בסעיף הקודם הראינו

$\Downarrow$

$\angle B_1 = \angle G_1$

$\Downarrow$

$\angle B_1 = \angle A$ (מתאימות)

$\angle G_1 = \angle F_1$

$\Downarrow$

$\angle A = \angle F_1 \implies \boxed{AH = FH}$

$\angle H = \angle H$ (זווית משותפת)

$GH = BH$ (סעיף 1)

$\Downarrow$

$\triangle AGH \cong \triangle FBH$

(ב)

(1) $\triangle BGH \sim DFE$ ראינו בסעיף א' ש:

לכן מתקיים:

$$\frac{ED}{BH} = \frac{FD}{BG}$$

$ED = EF = 3$

$\Downarrow$

$$\frac{3}{BH} = \frac{2}{7} \implies BH = \frac{3 \cdot 7}{2} = 10\frac{1}{2}$$

ס"מ

(2)

$\angle G_1 = \angle G_2$ (קודקודיות) $\implies \boxed{\angle G_2 = \angle F_1}$

$\angle C = \angle B_1$ (מתחלפות) $\implies \boxed{\angle C = \angle A}$

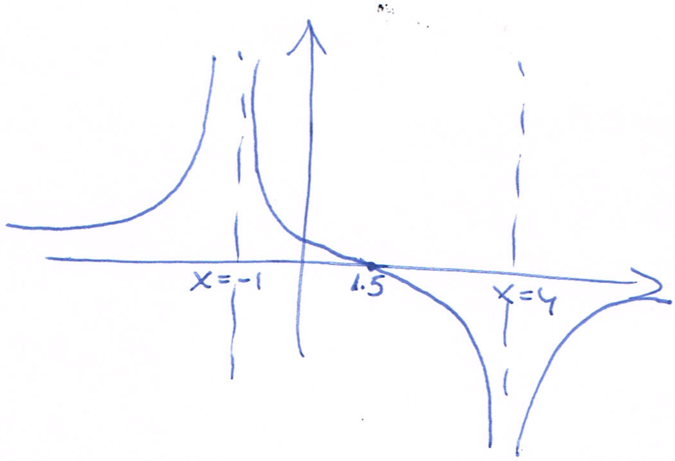
$\implies \triangle AHF \sim \triangle EGC$ (זוויות, זוויות)

$$\frac{GC}{AF} = \frac{EC}{AH} = \frac{ED+DC}{AB+BH} = \frac{3+4}{4+10.5} = \frac{7}{14.5} \longrightarrow \boxed{\frac{AF}{GC} = \frac{29}{14}}$$

2.

(א)

(1)



(2)

מגרף ניתן לראות שלפונ' יש פיתול (משנה סימן)

כלו' $f''=0$,

אבל ל- f' יש נקודת קיצון אז הנגזרת

של ה f' צריכה להיות שווה לאפס.

את זה הוכחנו עכשיו.

הפונ' עוברת מקעורה כלפי מעלה $f''>0$ לקעורה כלפי מטה $f''<0$

כלו' ש- f' בנקודת הקיצון היא מהצורה $\nearrow \searrow$ של max.

(ב)

נציב $(1.5,0)$ בפונ'

$$0=\frac{3a-4.5b}{(1.5^2-1.5a+c)^2}$$

$$0=3a-4.5b \rightarrow \boxed{a=1.5b}$$

עבור $x=4$ ו $x=-1$ המכנה מתאפס.

$$0=(-1)^2+a+c=1+a+c \rightarrow c=-1-a$$
$$0=4^2-4a+c=16-4a+c \rightarrow c=4a-16$$

$$-1-a=4a-16$$
$$15=5a$$
$$\boxed{a=3}$$

$$\boxed{c=-4} \leftarrow \boxed{b=4.5}$$

$$f(x=-2)=\frac{3\cdot3-3\cdot4.5\cdot(-2)}{((-2)^2+2\cdot3-4)^2}=\frac{9+27}{(4+6-4)^2}=\frac{36}{36}=1$$

$(-2,1)$

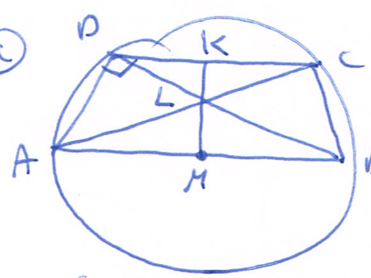
ה (1) $y'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot 4\cos 4x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 2x=$

$=(2\sin x\cos x)^2=4\sin^2 x\cos^2 x$

(2) $\int_0^{\pi} f(x)dx=g(\pi)-g(0)=\frac{1}{2}\cdot\pi-0=\frac{\pi}{2}$

6. א



$90^\circ=\sphericalangle KMB$ הראנו ב

$\triangle DKL\sim\triangle LMB$ (זוויות, זוויות)

$AL=LB$ הראנו ב

$\sphericalangle DAL=\sphericalangle DAB-\sphericalangle LAB=\alpha-(90-\alpha)=2\alpha-90$

$\sin\sphericalangle DAL=\sin(2\alpha-90)=\frac{DL}{AL}\rightarrow DL=LA\cdot\sin(2\alpha-90)$

$DL=AL\cdot\sin(2\alpha-90)=-AL\sin(90-2\alpha)=-AL\cos 2\alpha$

$\triangle DKL\sim\triangle LMB$ בגלל הדמיון בין המשולשים

$\frac{LK}{LM}=\frac{DL}{LB}=\frac{-AL\cos 2\alpha}{LB}=\frac{-AL\cos 2\alpha}{LA}=-\cos 2\alpha$

ב

$\frac{LK}{LM}=-\cos 2\alpha=-\cos 120=\frac{1}{2}\rightarrow LM=2LK$

$S_{DMC}=\frac{MK\cdot DC}{2}=\frac{(LM+KL)DC}{2}=\frac{3KL\cdot DC}{2}=3\cdot S_{DLC}$

$=3S$

($MK\perp DC$ הראנו ב)

8 ① $f(x=0) = 4\sin^2 0 \cdot \cos^2 0 = 0 \qquad (0,0)$

$0 = 4\sin^2 x \cos^2 x$

$\sin x = 0 \rightarrow x = \pi k \qquad (0,0) \quad (\pi,0)$ בתחום שלנו :

$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad (\frac{\pi}{2},0)$

② $f(x) = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 4\sin^4 x$

$f'(x) = 4\cdot 2\sin x\cos x - 4\cdot 4\sin^3 x\cos x$

$f'(x) = 0$ בנקודת הקיצון

$0 = 8\sin x\cos x - 16\sin^3 x\cos x = 8\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$

$\sin x = 0 \rightarrow x = \pi k$

$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

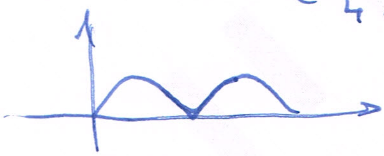
$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$

$\min (\frac{\pi}{2},0) \qquad \min (0,0)$ בדקו ש:

$\max (\frac{3\pi}{4},1) \qquad \max (\frac{\pi}{4},1)$

③



③

$0 \le f(x) \le 1 \qquad 8\sin^2 x\cos^2 x = 2f(x)$

מהגרף ניתן לראות ש: f מוגבלת

ולכן $0 \le 2f(x) \le 2$

נשאר להראות ש- f מחזורית עם מחזור π

$f(x+\pi) = 4\sin^2(x+\pi)\cdot\cos^2(x+\pi) =$

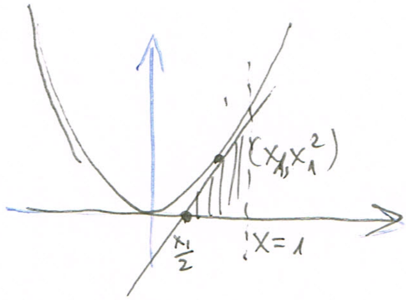
$= 4\sin^2(\pi-(x+\pi))\cdot[-\cos(\pi-(x+\pi))]^2$

$= 4\sin^2(-x)\cdot(-\cos(-x))^2 = 4(-\sin x)^2\cdot(-\cos x)^2$

$= 4\sin^2 x\cos^2 x$

ולכן לכל x מתקיים $0 \le 8\sin^2 x\cos^2 x \le 2$

ט.



נסמן את נקודת ההשקה (x_1, x_1^2)

$y' = 2x$

$y'(x=x_1) = 2x_1$

נמצא את משוואת המשיק:

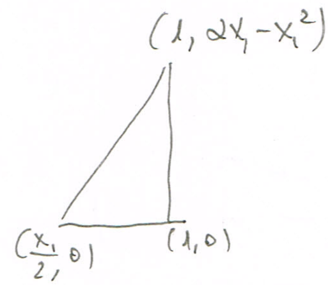
משוואת המשיק

$$y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$$
$$y - x_1^2 = 2x_1x - 2x_1^2$$
$$y = 2x_1x - x_1^2$$

נקודת חיתוך עם ציר ה- x (של המשיק):

$$0 = 2x_1x - x_1^2 = x_1(2x - x_1)$$
$$2x - x_1 = 0$$
$$\boxed{x = \frac{x_1}{2}}$$

$\left(\frac{x_1}{2}, 0\right)$



החיתוך של המשיק עם הישר $x=1$

$$y(x=1) = 2x_1 \cdot 1 - x_1^2 = 2x_1 - x_1^2$$

שטח המשולש המבוקש:

$$f(x) = \text{שטח המשולש} = \frac{(2x_1 - x_1^2)\left(1 - \frac{x_1}{2}\right)}{2} = \frac{2x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{4} =$$
$$= x_1 - x_1^2 + \frac{x_1^3}{4}$$

$$f'(x) = 1 - 2x_1 + \frac{3x_1^2}{4}$$

נחפש מקסימום ע"י נגזרת:

בנקודת הקיצון מתקיים: $f'(x) = 0$

$$0 = 1 - 2x_1 + \frac{3x_1^2}{4} \longrightarrow 3x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{8+4}{6} = 2 \quad \text{(גדול מ-1)}$$

$$x_2 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$$

נבדוק שזו אכן max.

$$f\left(x = \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$$