12. (110)

$$(k+1)^3-(k+1) \overset{?}{<} 5^{k+1-1} = 5\cdot 5^{k-1}$$

$$(k+1)^3-(k+1) \overset{?}{\leq} 5(k^3-k)$$

$$k^3+3k^2+3k-k-1 \overset{?}{\leq} 5k^3-5k$$

$$3k^2-7k \overset{?}{\leq} 4k^3 \quad /:k$$

$$3k-7 \overset{?}{\leq} 4k^2$$

$$3k < 4k^2+7$$

זה מתקיים לכל k בתחום $(k>3)$
(אפשר להוכיח בעזרת אינדוקציה נוספת)

15. (110)

$$3^{-(k+1)}+4^{-(k+1)} \overset{?}{<} 2^{-(k+1)} = 2^{-k}\cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-k}$$

$$3^{-(k+1)}+4^{-(k+1)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}(3^{-k}+4^{-k})$$

$$3^{-k}\cdot 3^{-1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{-k} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}\cdot 4^{-k}-4^{-k}\cdot\frac{1}{4}$$

$$3^{-k}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) \leq 4^{-k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\cdot 3^{-k} < \frac{1}{4}\cdot 4^{-k}$$

(שימו לב שצד שמאל שלילי וצד ימין חיובי)

20. (110)

$$\underbrace{\frac{1}{1^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\cancel{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \cancel{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

24. (110)

$$\underbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{3n+1}}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} \overset{?}{>} 1$$

$$\cancel{1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} \overset{?}{>} \cancel{1}$$

$$\frac{3n+4+3n+2}{(3n+2)(3n+4)} \overset{?}{>} \frac{1}{n+1}-\frac{1}{3n+3} = \frac{3-1}{3(n+1)} = \frac{2}{3(n+1)}$$

$$\frac{\cancel{2}(3n+3)}{(3n+2)(3n+4)} = \frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} \overset{?}{>} \frac{\cancel{2}}{3(n+1)}$$

$$(3n+3)\cdot 3(n+1) \overset{?}{>} (3n+2)(3n+4)$$

$$3(n+1)\cdot 3(n+1) \overset{?}{>} 9n^2+18n+8$$

$$9n^2+18n+9 > 9n^2+18n+8$$

17.

$n=k+1$

$$2^{k+1}+(k+1)^2 \overset{?}{<} 3^k = 3\cdot\underbrace{3^{k-1}}$$

$$2\cdot 2^k + k^2 + 2k+1 \overset{?}{<} 3\left(2^k+k^2\right)$$

$$2\cdot 2^k + k^2 + 2k+1 \overset{?}{<} 3\cdot 2^k + 3\cdot k^2$$

$$2k+1 \overset{?}{<} 2^k + 2k^2$$

k מספר שלם -בהנחה זה 5 ומעלה לכן

$$2k < 2k^2 \;/:2k \quad (ב), \qquad 1 < 2^k \quad (א)$$

$$1 < k$$

$$2k+1 < 2k^2 + 2^k$$

29.

$n=k$ הנחה

$$(k+1)^k < k^{k+1} \quad /:k^k$$

$$\frac{(k+1)^k}{k^k} < k$$

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < k$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < k$$

$n=k+1$ הוכחה עבור

$$(k+2)^{(k+1)} \overset{?}{<} (k+1)^{k+2} \quad /(k+1)^{k+1}$$

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \overset{?}{<} k+1$$

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \overset{?}{<} (k+1)$$

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \overset{?}{<} (k+1)$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\text{מההנחה}}\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \overset{?}{<} k+1 \qquad \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \quad \text{בירור}$$

$$k\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \overset{?}{<} k+1$$

$$k+\frac{k}{k+1} < k+1$$

28. (110)

$$(k+1)! \overset{?}{\leq} \underbrace{2\cdot 4\cdot 8\cdots}\, 2^{(k+1)-1}$$

$$(k+1)! \overset{?}{\leq} k!\cdot 2^{k} \quad / : k!$$

$$k+1 \leq 2^{k}$$

התרגיל נכון עבור $k \geq 2$ וגם הביטוי שהגענו אליו נכון עבור $k \geq 2$, הוכחנו בעזרת אינדוקציה נוספת אליו.

30. (110)

$$\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} \sqrt{n+1} \quad / \cdot\sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n(n+1)}+1 \overset{?}{>} n+1 \longrightarrow \sqrt{n(n+1)} > n$$

$$\sqrt{n(n+1)} > \sqrt{n\cdot n} = n$$

31. (110)

חלק שמאלי של האי שוויון:

$$\frac{1}{\sqrt{4n+4}} \overset{?}{<} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n+4}} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{4n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \quad / \cdot\sqrt{4n}$$

$$\sqrt{\frac{4n}{4n+4}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \overset{?}{<} \frac{2n+1}{2n+2} \quad / (\ )^2$$

$$\frac{n}{n+1} \overset{?}{<} \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \longrightarrow n(4n^2+8n+4) \overset{?}{<} (n+1)(4n^2+4n+1)$$

$$\cancel{4n^3}+\cancel{8n^2}+\cancel{4n} < \cancel{4n^3}+\cancel{4n^2}+n+\cancel{4n^2}+\cancel{4n}+1$$

$$0 < n+1$$

חלק ימיני של האי שוויון:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \quad / \sqrt{2n+1}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{<} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \quad / (\ )^2$$

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \overset{?}{<} \frac{2n+1}{2n+3} \longrightarrow (2n+3)(4n^2+4n+1) \overset{?}{<} (2n+1)(4n^2+8n+4)$$

$$\cancel{8n^3}+\cancel{8n^2}+2n+\cancel{12n^2}+12n+3 \overset{?}{<} \cancel{8n^3}+\cancel{16n^2}+8n+\cancel{4n^2}+8n+4$$

$$0 < 2n+1$$