10 (668)

נסמן את המספר הראשון ב-x ואת המספר השני ב- $\frac{100}{x}$

$f(x)=x+\frac{100}{x} \rightarrow f'(x)=1-\frac{100}{x^2}=0 \rightarrow x=\pm 10$ $\quad \boxed{x=10}$

$f(10)=10+10=20$ (נשאר לבדוק שזה מינימום)

11 (668) א

נסמן את המספר ב- x

$f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \rightarrow x=1, \cancel{x=-1}$ ב $f(1)=1+1=2$

נשאר לבדוק שזה מינימום

ג $x+\frac{1}{x}\geq 2$ ראינו בסעיף זה שהתוצאה המינימלית של f היא 2 לכן

12 (668)

המספר הראשון - x, השני $3x$ השלישי $\frac{162}{3x^2}$

$f(x)=x+3x+\frac{162}{3x^2} \rightarrow f'(x)=1+3-\frac{6x\cdot 162}{9x^4}=4-\frac{108}{x^3}=0 \rightarrow \boxed{x=3}$

נשאר להראות שאכן זה מינימום. המספרים הם 3, 9, 6.

13 (668)

המספר הראשון - x, השני $\frac{48}{x}$

$f(x)=x^3+\frac{48}{x} \rightarrow f'(x)=3x^2-\frac{48}{x^2}=0$

$\boxed{x=2}, \cancel{x=-2}$ $\quad f(2)=8+24=32$

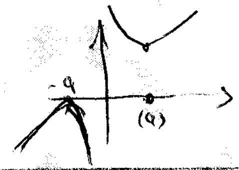
נשאר להראות שזו אכן מינימום.

א $y=x+a$, $f(x)=\frac{y^2}{x}$ $\quad f(x)=\frac{(x+a)^2}{x}=\frac{x^2+2xa+a^2}{x}=x+2a+\frac{a^2}{x}$

$f'(x)=1-\frac{a^2}{x^2}=0 \rightarrow x=a\ ,\ x=-a$

נשאר להראות שהנק' $(a,4a)$ היא מינימום ו- $(-a,0)$ מקסימום.

ב יש אסימפטוטה עבור $x=0$



(1) ענינו כבר למעלה.

(2) עליה: $a<x$, $-a>x$

ירידה: $0<x<a$, $-a<x<0$

(3) נוסיף את הנתונים שמצאנו לשרטוט

---

14 (669)

המספר הראשון - x, השני $72-x$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{72-x}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{72-x}}=0 \rightarrow \cancel{2}\sqrt{x}=\cancel{2}\sqrt{72-x}$

$x=72-x$

$\boxed{x=36}$

צריך להראות שזה מקסימום.

$f(36)=\sqrt{36}+\sqrt{72-36}=6+6=12$

11 (668)

(א) $y=a+\frac{1}{a} \rightarrow y'=1-\frac{1}{a^2} \overset{\text{קיצון}}{=} 0 \rightarrow a^2=1$

$a=1 \quad \cancel{a=-1}$

(ב) $y(1)=1+\frac{1}{1}=2$

ולכן $a=1$ זה מינימום. $y''=\frac{2}{a^3} \rightarrow y''(1)=\frac{2}{a^3}>0$

(ג) ראינו בסעיף הקודם שהמינימום של הפונקציה הוא 2 לכן $y=a+\frac{1}{a}\geq 2$

13 (668)

$xy=48 \rightarrow y=\frac{48}{x}$

$f=x^3+y=x^3+\frac{48}{x} \rightarrow f'=3x^2-\frac{48}{x^2} \overset{\text{קיצון}}{=} 0$

$3x^4=48$

$x=2,\ \cancel{x=-2}$

$f''=6x+\frac{96}{x^3}$

$f''(2)>0$

קבלנו את מינימום. המספרים $x=2$ $y=24$ והסכום $f=2^3+24=32$

(א) $f=\frac{y^2}{x}=\frac{(x+a)^2}{x} \rightarrow f'=\frac{2(x+a)x-(x+a)^2}{x^2}=\frac{(x+a)(2x-x-a)}{x^2}=\frac{(x+a)(x-a)}{x^2}$

$f'=0=\frac{(x+a)(x-a)}{x^2} \Rightarrow x=a \quad \cancel{x=-a}$

בדקנו שזה את מינימום. ולכן שתי התוצאות $x=a$, $y=x+a=2a$.

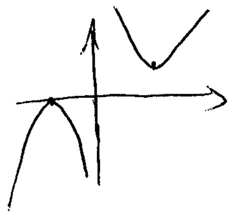
(ב) ראינו שיש 2 את קיצון (סעיף א) $min(a,4a)$ $max(-a,0)$

(שים לב שיש אסימפטוטה ב- $x=0$.

עולה $x>a$, $x<-a$

יורדת $0<x<a$, $-a<x<0$

(ג)



14 (669)

$\begin{cases} x+y=72 \\ f=\sqrt{x}+\sqrt{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=72-y \\ f=\sqrt{72-y}+\sqrt{y} \end{cases}$

$f'=\frac{-1}{2\sqrt{72-y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}} \overset{\text{קיצון}}{=} 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{72-y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}} \rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{72-y}$

$y=72-y \rightarrow \boxed{y=36}$

y	25	36	49
f'	+		−
f	↗	max	↘

לכן המספרים $y=36$ $x=36$ וסכום השורשים הוא 12.

17 (669)

$\begin{cases} x^2+y^2=32 \\ f=x+y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{32-y^2} \\ f=\sqrt{32-y^2}+y \end{cases}$

$f'=\frac{-2y}{2\sqrt{32-y^2}}+1 \underset{\text{קיצון}}{=} 0 \rightarrow y=\sqrt{32-y^2} \rightarrow y^2=32-y^2$

$y=4, \cancel{y=-4}$

y	1	4	5
f'	+		−
f	↗	max	↘

א. $y=4$ $x=4$ וסכומם 8.

ב. נבדוק את הקצוות $x=0$ $y=\sqrt{32}$ (זה מספרי כמובן ל- $x=\sqrt{32}$! $y=0$)

בפונ' ונקבל שזו לא נמצא בתוך הקיצון שמצאנו: $f=\sqrt{32}$

לכן זה המינימום. מספר אחד 0 מספר שני $\sqrt{32}$ וסכומם $\sqrt{32}$.

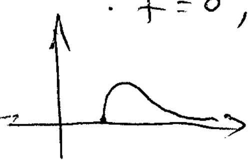
ג) $f=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x-a}}{x} \rightarrow f'=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x-a}}-\sqrt{x-a}}{x^2}=\frac{x-2(x-a)}{2x^2\sqrt{x-a}} \underset{\text{קיצון}}{=} 0$

$-x+2a=0 \rightarrow x=2a$

במקרה והמכנה תמיד חיובי (כמו אצלנו) מספיק לגזור את המונה $f''=-1<0$

לכן קבלנו מקס. $x=2a$ $y=\sqrt{a}$.

ד) מכיוון שקבלנו נק' אחת, נבדוק בקצה $x=a$ ונקבל $y=0$, $f=0$.

ה) 

יש אסימפטוטה $f=0$.

18 (669)

$\begin{cases} a+b=1 \\ f=ab+\frac{1}{ab} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ f=(1-b)b+\frac{1}{(1-b)b} \end{cases} \rightarrow f=b-b^2+\frac{1}{b-b^2}$

$f'=1-2b+\frac{2b-1}{(b-b^2)^2} \underset{\text{קיצון}}{=} 0 \longrightarrow (1-2b)(b-b^2)^2=1-2b.$

$(1-2b)(b^2-2b^3+b^4)=1-2b \rightarrow (1-2b)[(b^2-2b^3+b^4)-1]=0$

$\boxed{b=\frac{1}{2}}$ $(b-b^2)^2=1$

$b-b^2=1$ אין פתרון

$b-b^2=-1$, $\cancel{b=1.61}$, $\cancel{b=-0.61}$

b	1/4	1/2	3/4
f'	−		+
f	↘	min	↗

$f=\frac{1}{4}+4=4\frac{1}{4}$ כי זה מינימום, $a=b=\frac{1}{2}$

לכן הפונ' תהיה תמיד גדולה או שווה למינימום שלה ובסה"כ $f=ab+\frac{1}{ab}\geq 4\frac{1}{4}$.

.12 (668)

x, y, z

$$\begin{cases} y = 3x \\ x\cdot y\cdot z = 162 \end{cases} \Rightarrow 3x\cdot x\cdot z = 162$$

$$z = \frac{162}{3x^2} = \frac{54}{x^2}$$

$$f = x+y+z = x+3x+\frac{54}{x^2} = 4x+\frac{54}{x^2}$$

$$f' = 4-\frac{54\cdot 2x}{x^4} = 4-\frac{108x}{x^4} = 4-\frac{108}{x^3} = 0 \Rightarrow 4x^3 = 108$$

קיצון

$$\boxed{x = 3}$$

x	2	3	4
y'	−	.	+
y	↘	min	↗

והמספרים 3, 9, 6

.20 (669)

$$b = a+k, \quad f(a) = \frac{b^n}{a^m} = \frac{(a+k)^n}{a^m} \Rightarrow f' = \frac{n(a+k)^{n-1}a^m - ma^{m-1}(a+k)^n}{(a^m)^2}$$

$$f' = 0 = (a+k)^{n-1}a^{m-1}[na - m(a+k)]$$

$$0 = (a+k)^{n-1}a^{m-1}(na-ma-mk)$$

$a = -k$
$b = 0$ לא יכול
$b, a > 0$

$\cancel{a = 0}$
$a = 0$ לא יכול
תחום הגדרה

$$a(n-m) = mk$$

$$\boxed{a = \frac{mk}{n-m}}$$

a	$\frac{\frac{1}{2}mk}{n-m}$	$\frac{mk}{n-m}$	$\frac{2mk}{n-m}$
y'	−		+
y	↘	min	↗

$$\boxed{b = a+k = \frac{mk}{n-m}+k = \frac{mk+nk-mk}{n-m} = \frac{nk}{n-m}}$$

.15 (674)

א. לפי ההגדרה

$$\text{היקף} = 20-2x$$

$$\frac{20-2x}{2\pi \cancel{x}} = \frac{\text{שטח הגזרה}}{\pi \cancel{x}^2}$$

$$\text{שטח הגזרה} = \frac{\cancel{\pi} x^2}{2\cancel{\pi}\cancel{x}}(20-2x) = 10x - x^2$$

ב.

$$f = 10x - x^2 \to f' = 10-2x \Rightarrow f' = 0 = 10-2x$$

$$\boxed{x = 5}$$

x	4	5	6
y'	+		−
y	↗	max	↘