פתרון מערכת משוואות לא הומוגנית – שיטת אלימנציה

פתרו את המערכת הבאה: $\bar{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$

נרשום את המערכת בצורה מפורשת:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 - t^2 \\ x'_2 = x_1 + 3x_2 + 2t \end{cases}$$

נחלץ את x_2 מהמשוואה הראשונה, נגזור ונציב במשוואה השניה ונקבל משוואה בנעלם אחד (x_1):

$$(*) \quad x_2 = x_1 - x'_1 - t^2 \;\rightarrow\; x'_2 = x'_1 - x''_1 - 2t$$

אחרי הצבה נקבל:

$$x'_2 = x_1 + 3x_2 + 2t$$

$$x'_1 - x''_1 - 2t_1 = x_1 + 3(x_1 - x'_1 - t^2) + 2t$$

$$x''_1 - 4x'_1 + 4x_1 = -4t + 3t^2$$

קבלנו משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים. את הפתרון של החלק ההומוגני נמצא בעזרת שורשי הפ"א:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \;\rightarrow r = 2, 2$$

$$\boldsymbol{x_{1h} = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}}$$

לחלק הלא הומוגני נציע פתרון מהצורה:

$$x_{1p} = \mathrm{A}t^2 + Bt + C, \qquad x'_{1p} = 2\mathrm{A}t + B, \qquad x_{1p} = 2\mathrm{A}$$

נציב במד"ר:

$$x''_1 - 4x'_1 + 4x_1 = -4t + 3t^2$$

$$2A - 4(2At + B) + 4(\mathrm{A}t^2 + Bt + C) = -4t + 3t^2$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} t^0:\; 2A - 4B + 4C = 0 \\ t^1:\; -8A + 4B = -4 \\ t^2:\; 4A = 3 \end{cases} \rightarrow A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{8}$$

$sgershon@technion.ac.il$

ומכאן הפתרון של x_1:

$$x_1 = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}$$

את x_2 נמצא ע"י הצבה ב $(*)$:

$$x_2 = x_1 - x'_1 - t^2 =$$

$$= c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} - \left(c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\right)' - t^2$$

$$= c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} - 2c_1e^{2t} - c_2e^{2t} - 2c_2te^{2t} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$$
$$- t^2$$

$$x_2 = -c_1e^{2t} - c_2e^{2t} - c_2te^{2t} - \frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8} = (-c_1 - c_2)e^{2t} - c_2te^{2t} - \frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8}$$

לסיכום פתרון המערכת הוא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \\ (-c_1 - c_2)e^{2t} - c_2te^{2t} - \frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8} \end{pmatrix} =$$

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8} \end{pmatrix}}$$

פתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

שלב א

נמצא פ"א ע"י $|A - \lambda I| = 0$

שלב ב

נמצא לכל ע"ע λ ו"ע v

שלב ג

פתרון המערכת הוא מהצורה: $x = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}v_n$

מקרה א – n ערכים עצמיים שונים (מט' לכסינה)

פתרו את המערכת הבאה: $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$

פתרון

נמצא פ״א וע״ע:

$$0=|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\cdots$$
$$=(1+\lambda)^2(5-\lambda)$$

נמצא ו״ע לע״ע $\lambda=5$:

$$0=(A-5I)v=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}v\ \to v=v_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

נמצא ו״ע לע״ע $\lambda=-1$:

$$0=(A+I)v=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}v\ \to v=\begin{pmatrix}-v_2-v_3\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לסיכום הפתרון הכללי:

$$\boldsymbol{x=c_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

מקרה ב – n ערכים עצמיים מרוכבים (מט' לכסינה)

פתרו את המערכת הבאה: $\bar{x}'=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-1\end{pmatrix}x$

פתרון

נמצא פ״א וע״ע: $det=2,\ \ trace=\ -2$

ומכאן הע״ע: $\lambda=-1\pm i$

נמצא ו״ע לע״ע $\lambda=-1-i$:

$$0=(A-(-1-i)I)v=\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix}v\ \to\begin{cases}v_1i=-v_2\\v_1=-iv_2\end{cases}\quad v=v_2\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

ומכאן הפתרון הכללי :

$$\bar{x} = e^{-t}(\cos(-t) + i\sin(-t))\binom{i}{1} = e^{-t}(\cos t - i\sin t)\binom{i}{1} = e^{-t}\binom{i\cos t + \sin t}{\cos t - i\sin t}$$
$$= e^{-t}\binom{\sin t}{\cos t} + ie^{-t}\binom{\cos t}{-\sin t}$$

נבחר רק את הוקטורים ונבנה את הפתרון הכללי :

$$\boldsymbol{\bar{x} = c_1 e^{-t}\binom{\sin t}{\cos t} + c_2 e^{-t}\binom{\cos t}{-\sin t}}$$

מקרה ג – מטי לא לכסינה

במקרה והמטריצה לא לכסינה (ז״א שלאחד הע״ע הר״א גדול מהר״ג), נציע פתרון מהצורה $e^{\lambda_1 t}(v_1 + v_2 t)$ כאשר דרגת הפולינום תלויה במספר הו״ע העצמיים החסרים.

פתרו את המערכת הבאה : $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x$

פתרון

נמצא ע״ע : $det = 4, \;\; trace = -4$

ומכאן הע״ע : $\lambda = -2, -2$

אם נציב $A + 2I$ נקבל שהר״ג הוא 1 ולכן חסר לנו וקטור עצמי אחד.

לכן נציע פתרון $\bar{x} = e^{-2t}\binom{a_1 t + a_0}{b_1 t + b_0}$

נגזור ונקבל $\bar{x}' = e^{-2t}\binom{-2a_1 t - 2a_0 + a_1}{-2b_1 t - 2b_0 + b_1}$

נציב במערכת :

$$e^{-2t}\binom{-2a_1 t - 2a_0 + a_1}{-2b_1 t - 2b_0 + b_1} = e^{-2t}\binom{-a_1 t - a_0 - b_1 t - b_0}{a_1 t + a_0 - 3b_1 t - 3b_0}$$

$$\begin{cases} -2a_1 = -a_1 - b_1 \\ -2a_0 + a_1 = -a_0 - b_0 \\ -2b_1 = a_1 - 3b_1 \\ -2b_0 + b_1 = a_0 - 3b_0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_0 = a_1 + b_0 = b_1 + b_0 \end{matrix}$$

ומכאן :

$$\bar{x}=e^{-2t}\begin{pmatrix}a_1t+a_0\\ b_1t+b_0\end{pmatrix}=e^{-2t}\begin{pmatrix}b_1t+b_0+b_1\\ b_1t+b_0\end{pmatrix}=b_1e^{-2t}\begin{pmatrix}t+1\\ t\end{pmatrix}+b_0e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

לסיכום הפתרון הכללי:

$$\boldsymbol{\bar{x}=b_1e^{-2t}\begin{pmatrix}t+1\\ t\end{pmatrix}+b_0e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}$$

דוג' נוספת

פתרו את המערכת הבאה: $\overline{x'}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}x$

פתרון

הפ"א: $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

ומכאן הע"ע: $\lambda=1,1,2$

נמצא ו"ע לע"ע $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&-1&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow v_2=4v_3,v_1=11v_3$$

ולכו הו"ע הוא: $\begin{pmatrix}11\\4\\1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda=1$ נקבל $r(A-I)=1$ ולכן הר"ג (מרחב הפתרונות) הוא $n-r(A-I)=1$ וחסר לנו ו"ע אחד.

לכן נגדיר פתרון $\bar{x}=e^t\begin{pmatrix}a_1t+a_0\\b_1t+b_0\\c_1t+c_0\end{pmatrix}$

נגזור ונקבל $\overline{x'}=e^t\begin{pmatrix}a_1t+a_0+a_1\\b_1t+b_0+b_1\\c_1t+c_0+c_1\end{pmatrix}$

נציב במערכת:

$$e^t\begin{pmatrix}a_1t+a_0+a_1\\b_1t+b_0+b_1\\c_1t+c_0+c_1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}a_1t+a_0+2b_1t+2b_0+3c_1t+3c_0\\b_1t+b_0+4c_1t+4c_0\\2c_1t+2c_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_0+c_1=2c_0 \\ b_1=b_1+4c_1 \\ b_0+b_1=b_0+4c_0 \\ a_1=a_1+2b_1+3c_1 \\ a_0+a_1=a_0+2b_0+3c_0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_0=c_1 \\ c_1=0 \\ b_1=0 \\ a_1=2b_0 \end{matrix}$$

ומכאן :

$$\bar{x}=e^t\begin{pmatrix} a_1t+a_0 \\ b_1t+b_0 \\ c_1t+c_0 \end{pmatrix}=\bar{x}=e^t\begin{pmatrix} 2b_0t+a_0 \\ b_0 \\ 0 \end{pmatrix}=b_0e^t\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+a_0e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לסיכום הפתרון הכללי:

$$\bar{x}=c_0e^{2t}\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון מערכת משוואות לא הומוגנית – שיטת וריאציית הפרמטר

דוג' 1

פתרו את המערכת הבאה: $\bar{x'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\bar{x}+\begin{pmatrix} 16te^t \\ 0 \end{pmatrix}$

פתרון

שלב א – מציאת פתרון למערכת ההומוגנית

נמצא ע"ע: $det=-6,\ \ trace=-1$

ומכאן הע"ע: $\lambda=-3,2$

נמצא ו"ע לע"ע $\lambda=-3$:

$$0=(A-(-3)I)v=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}v\rightarrow\begin{cases} 4v_1=2v_2 \\ 2v_1=v_2 \end{cases}\quad v=v_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

נמצא ו"ע לע"ע $\lambda=2$:

$$0=(A-2I)v=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}v\rightarrow\begin{cases} -v_1=2v_2 \\ 2v_1=-4v_2 \end{cases}\quad v=v_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מכאן, פתרון החלק ההומוגני:

$$\overline{x} = c_1 e^{2t}\binom{2}{1} + c_2 e^{-3t}\binom{1}{-2}$$

שלב ב' – מציאת פתרון פרטי בשיטת וריאציית הפרמטר

נציע פתרון מהצורה:

$$\overline{x_p} = c_1(t)e^{2t}\binom{2}{1} + c_2(t)e^{-3t}\binom{1}{-2}$$

ונדרוש:

$$\overline{x}' = c_1'(t)x_1 + c_2'(t)x_2 + \cdots c_n'(t)x_n = \binom{16te^t}{0}$$

אצלנו:

$$c_1'(t)e^{2t}\binom{2}{1} + c_2' e^{-3t}\binom{1}{-2} = \binom{16te^t}{0}$$

נרשום את 2 המשוואות בצורה "רגילה":

$$\begin{cases} 2c_1'(t)e^{2t} + c_2' e^{-3t} = 16te^t \\ c_1'(t)e^{2t} - 2c_2' e^{-3t} = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נבודד את c_1':

$$c_1'(t) = 2c_2'(t)e^{-5t}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$4c_2'(t)e^{-3t} + c_2'(t)e^{-3t} = 16te^t$$

$$5c_2'(t)e^{-3t} = 16te^t$$

$$c_2'(t) = \frac{16}{5}\cdot te^{4t}$$

$$c_2(t) = \int \frac{16}{5}\cdot te^{4t}dt = \frac{16}{5}\cdot e^{4t}\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}\right) = e^{4t}\left(\frac{4}{5}t - \frac{1}{5}\right)$$

הערה: אין צורך בהוספת קבוע, כי מדובר בפתרון פרטי.

נחזור ל c_1':

$$c_1'(t) = 2c_2'(t)e^{-5t}$$

sgershon@technion.ac.il

$$c_1'(t) = 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot te^{4t}e^{-5t} = \frac{32}{5} \cdot te^{-t}$$

$$\boldsymbol{c_1(t)} = \int \frac{32}{5} \cdot te^{-t}dt = \boldsymbol{\frac{32}{5} \cdot e^{-t}(-t-1)}$$

לסיכום, הפתרון הפרטי :

$$\overline{x_p} = c_1(t)e^{2t}\binom{2}{1} + c_2(t)e^{-3t}\binom{1}{-2}$$

$$\overline{x_p} = \frac{32}{5} \cdot e^{-t}(-t-1)e^{2t}\binom{2}{1} + e^{4t}\left(\frac{4}{5}t - \frac{1}{5}\right)e^{-3t}\binom{1}{-2} =$$

$$-\frac{32}{5} \cdot e^{t}(t+1)\binom{2}{1} + e^{t}\left(\frac{4}{5}t - \frac{1}{5}\right)\binom{1}{-2} =$$

$$e^t\begin{pmatrix} -\frac{64}{5}t - \frac{64}{5} + \frac{4}{5}t - \frac{1}{5} \\ -\frac{32}{5}t - \frac{32}{5} - \frac{8}{5}t + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -12t-13 \\ -8t-6 \end{pmatrix}$$

לסיכום, הפתרון הפרטי :

$$\boldsymbol{\bar{x}_p = e^t\begin{pmatrix} -12t-13 \\ -8t-6 \end{pmatrix}}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא :

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h$$

$$\boldsymbol{\bar{x} = e^t\begin{pmatrix} -12t-13 \\ -8t-6 \end{pmatrix} + c_1e^{2t}\binom{2}{1} + c_2e^{-3t}\binom{1}{-2}}$$

דוג' 2

פתרו את המערכת הבאה : $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$

פתרון

<u>שלב א – מציאת פתרון למערכת ההומוגנית</u>

נמצא ע"י : $det = 3, \quad trace = -4$

ומכאן הע"ע: $\lambda = -3, -1$

נמצא ו"ע לע"ע $\lambda = -3$:

$$0 = (A - (-3)I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \ \rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \quad v = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ו"ע לע"ע $\lambda = -1$:

$$0 = (A - 2I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v \ \rightarrow \begin{cases} -v_1 = v_2 \\ v_1 = -v_2 \end{cases} \quad v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מכאן, פתרון החלק ההומוגני:

$$\boldsymbol{\overline{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

<u>שלב ב' – מציאת פתרון פרטי בשיטת וריאציית הפרמטר</u>

נציע פתרון מהצורה:

$$\overline{x_p} = c_1(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ונדרוש:

$$\overline{x'} = c_1'(t) x_1 + c_2'(t) x_2 + \cdots c_n'(t) x_n = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

אצלנו:

$$c_1' e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2' e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

נרשום את 2 המשוואות בצורה "רגילה":

$$\begin{cases} c_1'(t) e^{-t} + c_2' e^{-3t} = 2e^{-t} \\ c_1'(t) e^{-t} - c_2' e^{-3t} = 3t \end{cases}$$

חיבור המשוואות נותן:

$$2c_1'(t) e^{-t} = 2e^{-t} + 3t$$

$$c_1'(t) = 1 + 1.5te^{t}$$

$$c_1(t) = \int (1 + 1.5te^t)dt = t + 1.5e^t(t-1)$$

חיסור המשוואות נותן:

$$2c_2'(t)e^{-3t} = 2e^{-t} - 3t$$

$$c_2'(t) = e^{2t} - 1.5te^{3t}$$

$$c_2(t) = \int (e^{2t} - 1.5te^{3t})dt = \frac{1}{2}e^{2t} - 1.5e^{3t}(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9})$$

לסיכום, הפתרון הפרטי:

$$\overline{x_p} = c_1(t)e^{-t}\binom{1}{1} + c_2(t)e^{-3t}\binom{1}{-1}$$

$$\overline{x_p} = [t + 1.5e^t(t-1)]e^{-t}\binom{1}{1} + [\frac{1}{2}e^{2t} - 1.5e^{3t}(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9})]e^{-3t}\binom{1}{-1} =$$

$$(t + 1.5e^t t - 1.5e^t)e^{-t}\binom{1}{1} + (\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t})e^{-3t}\binom{1}{-1} =$$

$$(te^{-t} + 1.5t - 1.5)\binom{1}{1} + (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6})\binom{1}{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t}\left(t + \frac{1}{2}\right) + t - \frac{4}{3} \\ e^{-t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

לסיכום, הפתרון הפרטי:

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-t}\left(t + \frac{1}{2}\right) + t - \frac{4}{3} \\ e^{-t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} e^{-t}\left(t+\frac{1}{2}\right)+t-\frac{4}{3} \\ e^{-t}\left(t-\frac{1}{2}\right)+2t-\frac{5}{3} \end{pmatrix} + c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$