משוואת ברנולי

משוואה מהצורה $y' + p(x)y = q(x)y^n$

ע״י הצבה $z = y^{1-n}$ ו $z' = (1-n)y^{-n}y'$

נציב במשוואה :

$$\frac{z'}{(1-n)y^{-n}} + p(x)\frac{z}{y^{-n}} = \mathrm{q(x)}\frac{y}{z}$$

נכפיל במכנה הראשון ונקבל:

$$z' + p(x)z(1-n) = q(x)(1-n)$$

והמשוואה עברה למשוואה מסדר ראשון.

הערות

1. עבור n=0,1 אין צורך להתשתמש בברנולי ואפשר לפתור בשיטת ג״א (או ורייאצית הפרמטר).
2. כאשר n>0 לא נקבל את הפתרון $y \equiv 0$ (כי אנחנו מחלקים ב y), זה יהיה פתרון סינגולרי. אין סתירה למקי״ כי תנאיו לא מתקיימים במקרה זה.

דוג' 1

$$y' + y = y^{1/2}$$

ראשית נשים לב כי $y \equiv 0$ הוא פתרון

נציב $z = y^{1-0.5}$ ונדלג ישירות למשוואה מסדר ראשון :

$$z' + 0.5z = 0.5$$

ג״א : $\mu(x) = e^{\int 0.5dx} = e^{0.5x}$

ומתקבלת המשוואה

$$(e^{0.5x}z)' = 0.5e^{0.5x}$$

$$e^{0.5x}z = e^{0.5x} + c$$

$$z = 1 + ce^{-0.5x}$$

$$y^{0.5} = z = 1 + ce^{-0.5x}$$

$$y = z^2 = (1 + ce^{-0.5x})^2, \qquad y \equiv 0$$

דוג' 2

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{y^3}, \quad y(1) = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

הפעם $y \equiv 0$ אינו פתרון.

נסמן $z = y^{1-(-3)}$ ונקבל:

$$z' + \frac{4}{x}z = 4x$$

ג"א: $\mu(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln|x|} = \mathrm{x}^4$

ומתקבלת המשוואה

$$(\mathrm{x}^4 z)' = 4\mathrm{x}^5$$

$$\mathrm{x}^4 z = \frac{2}{3}\mathrm{x}^6 + c$$

$$z = \frac{2}{3}\mathrm{x}^2 + \frac{c}{\mathrm{x}^4}$$

נחזור ל y:

$$y^4 = z = \frac{2}{3}\mathrm{x}^2 + \frac{c}{\mathrm{x}^4}$$

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}\mathrm{x}^2 + \frac{c}{\mathrm{x}^4}}$$

מת"ה ברור שצריך לבחור את המינוס, נמצא את קבוע האינטגרציה

$$y(1) = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}} = -\sqrt[4]{\frac{2}{3} + c}$$

$$c = 0$$

והפתרון:

$$y = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}\mathrm{x}^2}$$

דוג' 3

$$y' + 5y = \sin(x)y^2$$

ראשית נשים לב כי $y \equiv 0$ הוא פתרון

נציב $z = y^{1-2}$ ונדלג ישירות למשוואה מסדר ראשון :

$$z' - 5z = -\sin(x)$$

אינטגרציה בחלקים:

$u = sinx, \quad dv = e^{-5x}$

$du = cosx, \quad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

ע"פ ג"א : $\mu(x) = e^{\int -5dx} = e^{-5x}$

נקבל:

$$(e^{-5x}z)' = -\sin(x)\, e^{-5x} \qquad (*)$$

נעשה פעמיים אינטגרציה בחלקים לאגף ימין ונקבל

(את המינוס נחזיר סוף החישוב) :

$$I = \int \sin(x)\, e^{-5x} dx = -\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) + \int \frac{e^{-5x}}{5}\cos(x)\, dx =$$

$$-\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - [\frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x) - \int -\frac{e^{-5x}}{25}\sin(x)\, dx] =$$

אינטגרציה בחלקים:

$u = cosx, \quad dv = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

$du = -sinx, \quad v = \frac{1}{25}e^{-5x}$

$$-\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x) - \int \frac{e^{-5x}}{25}\sin(x)\, dx =$$

$$-\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x) - \frac{1}{25}\int e^{-5x}\cos(x) =$$

$$-\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x) - \frac{1}{25}I$$

ניזכר בהתחלת החישוב:

$$I = -\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x) - \frac{1}{25}I$$

sgershon@technion.ac.il

$$\frac{26}{25}I = -\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x)$$

$$I = \frac{25}{26}\left[-\frac{e^{-5x}}{5}\sin(x) - \frac{1}{25}e^{-5x}\cos(x)\right] = -\frac{1}{26}[5e^{-5x}\sin(x) + e^{-5x}\cos(x)]$$

נוסיף את המינוס מתחילת התרגיל:

$$I = \frac{1}{26}[5e^{-5x}\sin(x) + e^{-5x}\cos(x)]$$

נחזור ל $(*)$:

$$e^{-5x}z = \int -\sin(x)\, e^{-5x}dx = \frac{1}{26}[5e^{-5x}\sin(x) + e^{-5x}\cos(x)] + c$$

$$z = \frac{1}{26}[5\sin(x) + \cos(x)] + ce^{5x}$$

נחזור למשתנים המקוריים:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{26}{5\sin(x) + \cos(x) + ce^{5x}}, \quad y \equiv 0$$

מטיפוס הומוגני

משוואה מהצורה $y' = F(\frac{y}{x})$ ע״י הצבה $v = \frac{y}{x}$. משוואה כזו אפשר להעביר למשוואה פרידה.

גם פה צריך לבדוק האם קיימים פתרונות סינגולריים.

נוסחא לפתרון:

$$\int \frac{dv}{F(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx$$

כאשר $F(v)$ הוא אגף ימין במשוואה.

דוג' 1

$$xy' - y = xtan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

נחלק ב x ונקבל:

$$y' - \frac{y}{x} = tan(\frac{y}{x})$$

ולכן היא משוואה הומוגנית, נסמן $v = \frac{y}{x}$.

ז״א $y = vx$ נגזור לפי x ונקבל $v + v'x = y'$

נחזור למד״ר ונציב:

$$v + v'x - v = \tan(v)$$

$$v'x = \tan(v)$$

$$\frac{xdv}{dx} = \tan(v)$$

חלקנו ב $\tan(v)$ ולכן לא נשכח לבדוק האם יש כאן פתרון סינגולרי (נשים לב ש $x=0$ לא בתחום ההגדרה ולכן מותר היה לחלק בו).

$$\cot(v)\, dv = \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

$$\ln|\sin(v)| = \ln|x| + c$$

$$\sin(v) = cx$$

$$v = \arcsin(cx)$$

נחזור למשתנים מקורים

$$\frac{y}{x} = \arcsin(cx)$$

$$y = x\arcsin(cx)$$

נציב ת״ה $y(1) = \frac{\pi}{2}$

$$y = x\arcsin(cx)$$

$$y(1) = \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \arcsin(c)$$

$$c = 1$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = x\arcsin(x)$$

נבדוק האם קיים פתרון סינגולרי.

$$\tan(v) = 0$$

$$v = \pi k \;\rightarrow\; y = x\pi k, \qquad k \epsilon Z$$

אבל אם נציב את ת״ה נקבל:

$$y(1) = \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

K לא שלם ולכן אין פתרון סינגולרי.

דוג' 2

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

נחלק ב x^2 את המונה והמכנה של אגף ימין:

$$y' = \frac{\frac{2y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2}$$

נסמן $v = \frac{y}{x}$.

ז"א $y = vx$ נגזור לפי x ונקבל $y' = v + v'x$ נציב במשוואה:

$$v + v'x = \frac{2v}{1 - v^2}$$

$$v'x = \frac{2v}{1 - v^2} - v = \frac{2v - v + v^3}{1 - v^2} = \frac{v + v^3}{1 - v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{v + v^3}{1 - v^2}$$

פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1 - v^2}{v + v^3}\mathrm{dv} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1 - v^2}{v + v^3}\mathrm{d\,v} = \int \frac{1 - v^2}{v(1 + v^2)}\mathrm{d\,v} = \int (\frac{1}{v} - \frac{2v}{1 + v^2})\mathrm{d\,v}$$

$$\ln|x| + c = ln|v| - ln|1 + v^2|$$

$$\ln|\mathrm{cx}| = \ln\left|\frac{v}{1 + v^2}\right|$$

$$\mathrm{cx} = \frac{v}{1 + v^2}$$

נחזור למשתנים מקוריים:

$$\text{cx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

נבדוק פתרונות סינגולריים:

$$\frac{y}{x} = v = 0$$

ז"א $y = 0$ אכן פותר את המשוואה.

נשים לב שהפתרון $y = 0$ נכלל בפתרון הכללי עבור $C = 0$ ולכן הוא לא נחשב לפתרון סינגולרי.

לסיכום:

$$\text{cx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$$