משוואת אוילר

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

ע״י הטרנספורמציה $x = e^t$ ניתן לעבור למשוואה עם מקדמים קבועים.

הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה הם $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$ כאשר r^i הם שורשי הפ״א.

בניית הפ״א תעשה בדרך הבאה : עבור ביטוי מהצורה x^n (או הנגזרת ה – n – ית של y) נתיב :

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))$$

הערה : המעבר בין פתרון של משוואה במקדמים קבועים למשוואת אויילר הוא :

$$e^x \to x$$
$$x \to lnx$$
$$sinx, cosx \to \sin(lnx), \cos(\ln x)$$
$$x^S e^{\alpha x}\cos(\beta x) \to ln^S(x)x^\alpha \cos(lnx)$$

דוג' 1

$$x^2 y'' + xy' + y = 0, x > 0$$

פתרון

הפ״א :

$$r(r-1) + r + 1 = 0$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$\boldsymbol{y = c_1 sin(lnx) + c_2 cos(lnx)}$$

דוג' 2

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0, x > 0$$

פתרון

הפ״א :

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) + r - 1 = 0$$

$$(r-1)(r^2 - 2r + 2r + 1) = 0$$

$$r = 1, \pm i$$

$$\boldsymbol{y = c_1 x + c_2 sin(lnx) + c_3 cos(lnx)}$$

נשים לב : הפתרונות לא רציפים ולא מוגדרים ב$x = 0$, כי משוואות אוילר המנורמלת לא מוגדרת שם.

משוואת אויילר לא הומוגנית

שלבי הפתרון :

- פתרון המשוואה ההומוגנית.
- ביצוע טרנספורמציה $\boldsymbol{g(x) \to \bar{g}(t)}$ כאשר $\boldsymbol{x = e^t}$.
- ניחוש פתרון ל $\boldsymbol{\bar{g}(t)}$ כמו שנעשה עבור משוואה עם מקדמים קבועים.
- חזרה למשתנה **x** ופתרון בעזרת השוואת מקדמים.

דוג' 1

$$x^2y'' - 2y = 2x^2 \,, x > 0$$

פתרון

שלב א - פתרון המשוואה ההומוגנית

פ"א : $$0 = r(r-1) - 2 = r^2 - r - 2$$

$$r = 2, -1$$

ומכאן הפתרון של החלק ההומוגני הוא :

$$y_h = c_1x^2 + \frac{c_2}{x}$$

שלב ב – טרנספורמציה ל t

$$2x^2 \to 2e^{2t}$$

שלב ג – הצעת פתרון מתאים

$$y_p = Ae^{2t}t$$

שלב ד – חזרה ל x ופתרון המד"ר

$$y_p = Ax^2lnx, \quad y'_p = 2Axlnx + Ax, \quad y''_p = 2Alnx + 2A + A = 2Alnx + 3A$$

$$x^2y'' - 2y = 2x^2$$

$$x^2(2Alnx + 3A) - 2Ax^2lnx = 2x^2$$

השוואת מקדמים : $3A = 2 \to A = \frac{2}{3}$

ולכן הפתרון הפרטי הוא: $y_{\mathrm{p}} = \frac{2}{3}x^2 lnx$

והפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$\boldsymbol{y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} + \frac{2}{3}x^2 lnx}$$

דוג' 2

$$\mathrm{x}^2 y'' + xy' + y = lnx \,, x > 0$$

פתרון

שלב א - פתרון המשוואה ההומוגנית

פ"א: $+10 = r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1$

$$r = \pm i$$

ומכאן הפתרון של החלק ההומוגני הוא:

$$y_{\mathrm{h}} = c_1 \cos(lnx) + c_2 \sin(lnx)$$

שלב ב – טרנספורמציה ל t

$$lnx \; \rightarrow t$$

שלב ג – הצעת פתרון מתאים

$$y_{\mathrm{p}} = At + B$$

שלב ד – חזרה ל x ופתרון המד"ר

$$y_{\mathrm{p}} = Alnx + B, \quad y'_{\mathrm{p}} = \frac{A}{x}, \quad y''_{\mathrm{p}} = \frac{-A}{x^2}$$

$$\mathrm{x}^2 y'' + xy' + y = lnx$$

$$\mathrm{x}^2 \left(\frac{-A}{x^2}\right) + x \cdot \frac{A}{x} + (Alnx + B) = lnx$$

השוואת מקדמים: $\begin{cases} A = 1 \; \rightarrow A = 1 \\ B = 0 \; \rightarrow B = 0 \end{cases}$

ולכן הפתרון הפרטי הוא: $y_{\mathrm{p}} = lnx$

והפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$y = c_1\cos(lnx) + c_2\sin(lnx) + lnx$$

דוג' 3

$$x^3y''' + xy' - y = x\,, x > 0$$

פתרון

שלב א - פתרון המשוואה ההומוגנית

פ"א: $0 = r(r-1)(r-2) + r - 1 = (r-1)(r^2 - 2r + 1)$

$$r = 1,1,1$$

ומכאן הפתרון של החלק ההומוגני הוא:

$$y_h = c_1x + c_2xlnx + c_3x^2lnx$$

שלב ב – טרנספורמציה ל t

$$x \to e^t$$

שלב ג – הצעת פתרון מתאים

$$y_p = At^3e^t$$

שלב ד – חזרה ל x ופתרון המד"ר

$$y_p = Axln^3x,\quad y'_p = Aln^3x + 3Aln^2x,\quad y''_p = \frac{3Aln^2x}{x} + \frac{6Alnx}{x}$$

$$y'''_p = \frac{6Alnx - 3Aln^2x}{x^2} + \frac{6A - 6Alnx}{x^2} = \frac{-3Aln^2x + 6A}{x^2}$$

$$x^3y''' + xy' - y = x$$

$$x^3\left(\frac{-3Aln^2x + 6A}{x^2}\right) + x(Aln^3x + 3Aln^2x) - (Axln^3x) = x$$

השוואת מקדמים: $6A = 1 \to A = \frac{1}{6}$

ולכן הפתרון הפרטי הוא: $y_p = \frac{1}{6}xln^3x$

והפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$\boldsymbol{y = c_1x + c_2xlnx + c_3x^2lnx + \frac{1}{6}xln^3x}$$