<u>פולינומים</u>

הגדרה: פולינום עם מקדמים ממשיים (או מרוכבים) הוא ביטוי מהצורה:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_i \in \mathbb{R}$ (או $a_i \in \mathbb{C}$) x – משתנה ו n טבעי.

<u>מעלת הפולינום</u> – החזקה הגבוהה ביותר שבו מופיע x עם מקדם שונה מאפס.

המטרה שלנו בתרגול זה למצוא את שורשי הפולינום.

שורש של פולינום הוא כל x שמהווה פתרון למשוואה $P(x) = 0$.

חלוקת פולינומים

חלוקה ללא שארית (שארית 0)

```
 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1
5x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x -1| x +1
5x^4 + 5x^3
--------------------------
        -2x^3 + x^2 + 2x - 1
        -2x^3 - 2x^2
         ---------------------
                 3x^2 + 2x - 1
                 3x^2 + 3x
              ---------------------
                         -x - 1
                         -x - 1
                      -----------
                              ==
```

הפולינום המחולק

$$5x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x - 1 =$$

$$= (x+1)(5x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$$

הפולינום המחלק

המנה

חלוקה עם שארית

```
 x^3 - 3x + 5
x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x + 5| x^2 +x +1
x^5 + x^4 + x^3
--------------------------
        -3x^3 + 2x^2 + 5x + 5
        -3x^3 -  3x^2 - 3x
        ----------------------------
                 5x^2 + 8x + 5
                 5x^2 + 5x + 5
              ---------------------
                         3x
```

הפולינום המחולק

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x + 5 =$$

השארית

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - 3x + 5) + 3x$$

הפולינום המחלק

המנה

sgershon@technion.ac.il

אם $g(x)$ ו $f(x)$ פולינומים ו $g(x)$ מחלק את $f(x)$ ללא שארית, נרשום $g(x)|f(x)$.

מחלק

הגדרה: יהי $f(x)$ פולינום עם מקדמיים ממשיים (או מרוכבים) $\alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ נקרא שורש של הפולינום $f(x)$ אם $f(\alpha)=0$.

<u>הערה</u>: קיום שורש תלוי בשדה בו אנו משתמשים.

משפטים עיקרים שיסייעו לנו למצוא שורשים של פולינום:

<u>**המשפט היסודי של האלגברה:**</u>

לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים ב $\mathbb{C}$ (לאו דווקא שונים זה מזה).

כל פולינום $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ניתן לכתיבה בצורה

$$\boldsymbol{P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

כאשר $x_1,x_1,\cdots x_1$ הם השורשים של $P(x)$ (השורשים לא בהכרח שונים זה מזה).

הערה אם α שורש של $P(x)$ נרשום $(x-\alpha)|P(x)$.

מחלק

<u>**ניחוש שורש רציונלי**</u>

יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n : $P(x)=a_nx^n+a_{n-}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ עם מקדמים ממשיים ושלמים. אם ל $P(x)$ יש שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזיי $p|a_0$ ו $q|a_n$.

תרגילים:

1. מצאו את השורשים של הפולינום: $f(x)=2x^3-x^2-4x+2$.

פתרון:

ל $f(x)$ מקדמים ממשיים ושלמים לכן אם ל $f(x)$ שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזיי $p|2$ ו $q|2$.

כלומר $p=\{\pm1,\pm2\}$ ו $q=\{\pm1,\pm2\}$. לכן $\frac{p}{q}\in\{\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2}\}$. **נציב** $x=\frac{1}{2}$ ונקבל

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ לכן $\frac{1}{2}$ הוא שורש של $f(x)$. לפי המשפט היסודי $(x-\frac{1}{2})|f(x)$. נשתמש בחלוקת פולינומים:

```
2x^2 - 4
2x^3 - x^2 - 4x + 2| x -0.5
2x^3 - x^2
----------------------
         - 4x + 2
         - 4x + 2
        ------------
            ==
```

ז"א

$$f(x)=(2x^2-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)=2(x^2-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=2(\mathrm{x}-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\frac{1}{2})$$

כלומר השורשים הם: $\pm\sqrt{2},\frac{1}{2}$.

2. מצאו את השורשים של הפולינום: $f(x)=x^4+4x^3-13x^2-40x+48$.

פתרון:

ל $f(x)$ מקדמים ממשיים ושלמים לכן אם ל $f(x)$ שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזיי $p|48$ ו $q|1$.

כלומר $p=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm16,\pm24,\pm48\}$ ו $q=\{\pm1\}$. לכן $\frac{p}{q}\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm16,\pm24,\pm48\}$. **נציב** $x=1$ ונגלה שהוא פתרון.

לאחר חלוקת פולינומים (נחלק ב $x-1$) נקבל $x^3+5x^2-8x-48$ הפעם $x=1$ לא פתרון אבל $x=3$ פתרון לאחר חלוקת פולינומים נוספת (במה נחלק?) נקבל $x^2+8x+16$ ולכן שורשי הפולינומים הם: $-4,-4,3,1$.

3. מצאו את השורשים של הפולינום: $p(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-16x+8$.

פתרון:

הפעם מקדמי הפולינום אינם שלמים. אבל הכפלה ב -2 תיתן פולינום עם מקדמים שלמים ועם **אותם שורשים**. נציב ונקבל $p\left(\frac{1}{2}\right)$=0 ולאחר חלוקת פולינומים נקבל: $p(x)=(2x^2-32)(x-\frac{1}{2})$.

שיטה למציאת ריבוי של שורש α

- **α הוא שורש מריבוי 2 של** $\boldsymbol{p(x) \leftrightarrow p(\alpha)=0,\ p'(\alpha)=0,\ p''(\alpha)\neq 0}$
- **α הוא שורש מריבוי k של** $\boldsymbol{p(x) \leftrightarrow}$

$$\boldsymbol{p(\alpha)=0,\ p'(\alpha)=0,\cdots\ p^{(k-1)}(\alpha)=0,\ \ p^{(k)}(\alpha)\neq 0}$$

תרגילים

1. מצאו את השורשים של $p(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$

פתרון

ל $p(x)$ מקדמים ממשיים ושלמים לכן אם ל $p(x)$ שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ אזיי $p|-2$ ו $q|1$ ולכן $\frac{p}{q}\in\{\pm1,\pm2\}$. נשים לב $p(1)=0$ (כל האחרים אינם שורשים). נבדוק מה הריבוי של 1 כשורש של הפולינום נתחיל ע"פ הנגזרת הראשונה של הפולינום:

$$p'(x)=4x^3-6x^2-2x+4 \quad \to p'(1)=0$$

לכן הריבוי הוא לפחות 2, נבדוק את הנגזרת הבאה:

$$p''(x)=12x^2-12x-2 \quad \to p''(1)\neq 0$$

לכן הריבוי של 1 כשורש של הפולינום הוא 2. נשאר למצוא עוד 2 שורשים.

מצאנו ש $(x-1)^2|p(x)$ לאחר חלוקת $p(x)$ ב $(x-1)^2$ נקבל x^2-2 ולכן הפתרונות הנוספים הם: $\pm\sqrt{2}$.

הערות

- 0 הוא שורש של $p(x)$ אם המקדם החופשי הוא 0 $\leftarrow$ $(a_0=0)$.
- 1 הוא שורש של $p(x)$ אם סכום מקדמי הפולינום הוא 0 $\leftarrow$ $(a_0+a_1+\cdots+a_n)=0$.
- -1 הוא שורש של $p(x)$ אם חיבור וחיסור לסרוגים של מקדמי הפולינום שווה 0 $\leftarrow$ $(a_0-a_1+\cdots+(-1)^n a_n)=0$.

2. מצאו את השורשים של $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

פתרון

סכום מקדמי הפולינום 0 ולכן 1 הוא שורש. נבדוק את הריבוי שלו:

$$p'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad \rightarrow p'(1) = 0$$

$$p''(x) = 6x + 2 \quad \rightarrow p''(1) \neq 0$$

לכן ריבויו שתיים, ע"י חלוקת פולינומים נקבל: $p(x) = (x-1)^2(x+3)$.

אם $p(x)$ פולינום עם מקדמים **ממשיים** ו z – מרוכב הוא שורש של $p(x)$ אזיי גם $\bar{z}$ הוא שורש של $p(x)$.

תרגיל

נתון כי לפולינום $p(z) = z^3 + z^2 - 5z + 3$ יש שורש $z = 3 + i$ מצאו את שאר שורשי הפולינום.

פתרון

מקדמי הפולינום ממשיים ולכן גם הצמוד של השורש הנתון הוא שורש $z_2 = \overline{z_1} = 3 - i$.

חסר לנו שורש אחד נסמנו ב α לפי המשפט היסודי מתקיים:

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \alpha) \ .$$

נשתמש בשני השורשים שמצאנו:

$$(z - z_1)(z - z_2) = [z - (3+i)][z - (3-i)] = [(z-3) - i][(z-3) + i]$$

נוסחת כפל מקוצר

$(a-b)(a+b)$

$$= (z-3)^2 - i^2 = (z-3)^2 + 1 = z^2 - 6z + 10$$

למציאת הגורם $z - \alpha$ נחלק את $p(z)$ ב $z^2 - 6z + 10$ ונקבל $z + 2$.

לסיכום: שורשי הפולינום הם: $3 \pm i, -2$.

מסקנה: אם $p(z)$ הוא פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה אי זוגית אז יש לו לפחות שורש אחד ממשי.

נוסחאות וייטה

נוסחאות המקשרות בין מקדמי הפולינום לשורשיו.
לפי המשפט היסודי של האלגברה:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

אם נפתח סוגריים באגף ימין נקבל פולינום זהה ל $P(x)$ לכן ניתן להשוות מקדמים של חזקות של x.

המקדם החופשי: $a_0 = a_n(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_n) = a_n(-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$

ז"א מכפלת השורשים: $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

(עבור פולינום מנורמל $a_n = 1$ מכפלת השורשים שווה למקדם החופשי עד כדי סימן).

המקדם של x^{n-1}: $a_{n-1} = a_n[-x_1 - x_2 - \cdots - x_n]$

ז"א סכום השורשים: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

תרגילים

1. נתון $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ פולינום עם מקדמים ממשיים. מצאו את a, b, c אם ידוע $P(0) = 10$ ו $1 + \mathrm{i}$ הוא שורש של $P(t)$.

פתרון

דרך א: $P(t)$ פולינום עם מקדמים ממשיים ולכן גם $1 - \mathrm{i}$ הוא גם שורש של הפולינום.

נציב $P(0) = 10, P(1 + i) = 0, P(1 - i) = 0$ ונקבל 3 משוואות עם 3 נעלמים.

דרך ב: (t) פולינום עם מקדמים ממשיים ולכן גם $1 - \mathrm{i}$ הוא גם שורש של הפולינום. נשתמש בוייטה: מצאנו 2 שורשים של הפולינום $1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}$ חסר לנו השורש השלישי, נסמנו ב α.

נציב $P(0) = 10 = c$. לפי וייטה, מכפלת השורשים שווה:

$$(-1)^3 c = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})\alpha$$

$$-10 = 2\alpha$$

$$\alpha = -5$$

סכום השורשים: $-a = (1-\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i}) + (-5)$

$$a = 3$$

למציאת b נציב $\alpha = -5$ בפולינום:

$$0 = P(-5) = -125 + 3 \cdot 25 + \mathrm{b} \cdot (-5) + 10 \ \rightarrow \mathrm{b} = -8$$

2. נתון הפולינום $p(z) = z^5 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ כאשר a_i ממשיים. ידוע כי $1+\mathrm{i}$ שורש מריבוי 2 של $p(z)$.

א. מהו ערכו של a_0?

ב. מצאו את a_1, a_2, a_3.

פתרון

א. מקדמי הפולינום ממשיים ולכן גם $1-\mathrm{i}$ הוא שורש מריבוי 2. כלומר 5 שורשי הפולינום הם: $1-\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, \alpha$. לפי וייטה סכום שורשי הפולינום:

$$-\frac{a_4}{1} = 0 = [2(1-\mathrm{i}) + 2(1+\mathrm{i}) + \alpha] \ \rightarrow \ \alpha = -4$$

מכפלת שורשי הפולינום:

$$a_0 = (-1)^5 z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5$$

$$a_0 = (-1)^5(1+i)(1-i)(1+)(1-i)(-4) = -2 \cdot 2 \cdot (-4) = 16$$

ב. $p(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5) =$

$$[z-(1-i)][z-(1+i)][z-(1-i)][z-(1+i)][z-(-4)] =$$

$$[(z-1)+i][(z-1)-i][(z-1)+i][(z-1)-i][z+4] =$$

$$[(z-1)^2 - i^2]^2[z+4] = [z^2 - 2z + 2]^2[z+4] =$$

$$(z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 4][z + 4] =$$

$$p(z) = z^5 - 8z^3 + 24z^2 - 28z + 16$$

ומכאן: $a_3 = -8\ , a_2 = 24,\ a_1 = -28,$