העתקות (טרנספורמציות) ליניאריות

הגדרה: **יהיו V, W מ״ו מעל אותו שדה F. העתקה $T: V \to W$ תקרא טרנספורמציה ליניארית (ט״ל) אם מתקיים:**

- $\forall u, v \in V \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$
- $\forall u \in V,\ \alpha \in F \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$

תכונות:

- $T(0) = 0$ **(נציב $\alpha = 0$)**
- $T(-v) = -T(v)$ **(נציב $\alpha = -1$)**

דוג׳

1. הוכיחו כי T ט״ל.

$$\begin{cases} T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2[x] \\ T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2b)x^2 + cx + d \end{cases}$$

פתרון נראה ששתי הדרישות מתקיימות:

דרישה א׳: נראה שמתקיים $T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

אגף שמאל:

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$$

$$= (a+\alpha+2b+2\beta)x^2 + (c+\gamma)x + (d+\delta)$$

אגף ימין:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (a+2b)x^2 + cx + d + (\alpha+2\beta)x^2 + \gamma x + \delta$$

$$= (a+\alpha+2b+2\beta)x^2 + (c+\gamma)x + (d+\delta)$$

קבלנו שוויון בין האגפים.

דרישה ב׳: נראה שמתקיים $T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

נצא אגף שמאל:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = (a\alpha + 2b\alpha)x^2 + c\alpha x + d\alpha$$

$$= \alpha[(a+2b)x^2 + cx + d] = \alpha T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

הגענו לאגף ימין ולכן גם הדרישה השנייה התקיימה ולכן T ט״ל.

טרנספורמציות חשובות

- **טרנספורמציית האפס:** $\boldsymbol{T(v) = 0 \quad \forall v \in V \quad T: V \to W}$
- **טרנספורמציית הזהות:** $\boldsymbol{T(v) = v \quad \forall v \in V \quad T: V \to V}$

2. הראו כי T ט״ל.

$$T: F^n \to F^m \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{m\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

פתרון

פעולות במטריצות

נראה את קיום התכונה הראשונה.

$$u, v \in F^n \;\; T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v)$$

פעולות במטריצות

נראה את קיום התכונה השנייה:

$$u \in F^n, \qquad T(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha A(u) = \alpha T(u)$$

.3

$$\begin{cases} T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2[x] \\ T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + bx + 1 \end{cases}$$ T לא ט״ל כי $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0x^2 + 0x + 0$

.4

$V=\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $T(x,y)=(\bar{x},\bar{y})$ $\quad T:V\to V$ האם T ט"ל?

נבדוק האם 2 הדרישות מתקיימות:

דרישה ראשונה: נסמן $u=(x,y),\ v=(a,b)$

$$T(u+v)=\mathrm{T}[(x,y)+(a,b)]=\mathrm{T}(x+a,y+b)=\left(\overline{x+a},\overline{y+b}\right)=\left(\bar{x}+\bar{a},\bar{y}+\bar{b}\right)$$

$$=(\bar{x},\bar{y})+\left(\bar{a},\bar{b}\right)=T(x,y)+T(a,b)=T(u)+T(v)$$

α ממשית

דרישה שנייה:

$$\alpha T(u)=\alpha T(x,y)=\alpha(\bar{x},\bar{y})=(\alpha\bar{x},\alpha\bar{y})=(\overline{\alpha x},\overline{\alpha y})=T(\alpha x,\alpha y)=T(\alpha u)$$

הערה חשובה: נשים לב שאם הסקלרים היו נלקחים מ $\mathbb{C}$ לא תמיד יכלנו לעשות את המעבר הזה ולכן מעל $\mathbb{C}$, T לא תהיה ט"ל.

הגדרה: $T:V\to W$ ט"ל.

הגרעין של T: $\ker T=\{v\in V: T(v)=0\}$

התמונה של T: $ImT=\left\{w\in W:\ \begin{matrix}\text{קיים } v\in V \text{ כך}\\ T(v)=w \text{ ש}\end{matrix}\right\}$

הדרגה של T $=\dim(ImT)$

משפט $T:V\to W$ **ט"ל**

1. $\ker T$ הוא תמ"ו של V.
2. ImT הוא תמ"ו של W.
3. משפט המימדים $\dim(V)=\dim(ImT)+\dim(KerT)$

תרגילים

.1 $\begin{cases} T: P_2[x] \to P_3[x] \\ T(p(x)) = x \cdot p(x) \end{cases}$

א. הראו כי T ט"ל. ב. מצאו בסיס ומימד ל $KerT$. ג. מצאו בסיס ומימד ל ImT.

פתרון

א. פתרו בבית.

ב.

$$kerT = \{p(x) \in P_2[x]: T\big(p(x)\big) = 0\} = \{ax^2 + bx + c:\ x(ax^2 + bx + c) = 0\} =$$

$$= \{ax^3 + bx^2 + cx = 0:\ a = b = c = 0\} = \{0\}$$

$$kerT = \{0\}, \qquad dimkerT = 0$$

ג.

$$ImT = \{xp(x) : p(x) \in P_2[x]\} = \{\, x(ax^2 + bx + c): a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{ax^3 + bx^2 + cx, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{sp}\{\mathrm{x}, x^2, x^3\}, \qquad dimImT = 3$$

הערה: נשים לב כי משפט המימדים מתקיים:

$$\underset{0}{\underset{\downarrow}{dimkerT}} + \underset{3}{\underset{\downarrow}{dimImT}} = \underset{3}{\underset{\downarrow}{dimV}} \quad ,$$

.2

$$\begin{cases} T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ T(A) = 2A^t + 3A \end{cases}$$

א. הראו כי T ט"ל. ב. מצאו בסיס ומימד ל $KerT$. ג. מצאו בסיס ומימד ל ImT.

פתרון

א. פתרו בבית.

ב.

$$kerT = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}): T(A) = 0\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : 2\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2a+3a & 2c+3b \\ 2b+3c & 2d+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} 5a = 0 \\ 2c+3b = 0 \\ 2b+3c = 0 \\ 5d = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = b = c = d = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

לסיכום: $kerT = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, dimkerT = 0$

ג.

$$ImT = \{2A^t + 3A : A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})\} = \left\{\begin{pmatrix} 5a & 2c+3b \\ 2b+3c & 5d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

המטריצות בת"ל

$$= \left\{5a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 5d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נוציא סקלרים

$$= sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad dimImT = 4$$

הערה: צריך להוכיח שהמטריצות בת"ל, פרישת המטריצות לווקטורים בני 4 ספרות ודירוג במטריצה יראה שלא התאפסה אף שורה. גם כאן התוצאה מתאימה למשפט הממדים:

$$\underbrace{dimkerT}_{0} + \underbrace{dimImT}_{4} = \underbrace{dimV}_{4}$$

הגדרה: $T: V \to W$ ט"ל

T נקראת חח"ע אם לכל $x, y \in V$ ו- $x \neq y$ מתקיים $T(x) \neq T(y)$.

T נקראת על אם לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש $T(v) = w$.

משפט

T חח"ע: $kerT = \{0\} \leftrightarrow dimkerT = 0$

T על: $ImT = W \leftrightarrow dimImT = dimW$

הוכח/הפרך

.1

א. תהי T ט״ל ו - $T(v_1), T(v_2), \cdots T(v_n)$ בת״ל $\leftarrow$ $v_1, v_2, \cdots v_n$ בת״ל?

הטענה נכונה :

נבדוק לפי הגדרה $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ נראה ש $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n = 0$

נפעיל T על המשוואה.

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

היות ו T ט״ל לכן :

$$T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \cdots + T(\alpha_n v_n) = 0$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

נתון $T(v_i)$ בת״ל ולכן $\forall \alpha_i = 0$.

ב. תהי T ט״ל ו - $v_1, v_2, \cdots v_n$ בת״ל $\leftarrow$ $T(v_1), T(v_2), \cdots T(v_n)$ בת״ל ?

הטענה לא נכונה : דוגי נגדית פשוטה $T = 0$, דוגי נוספת : $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

עבור $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בת״ל נקבל $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ שהם ת״ל.

ג. T ט״ל חח״ע ו - $v_1, v_2, \cdots v_n$ בת״ל $\leftarrow$ $T(v_1), T(v_2), \cdots T(v_n)$ בת״ל ?

הטענה נכונה :

נבדוק לפי הגדרה $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$ נראה ש $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n = 0$

T ט״ל

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

היות ו T חח"ע לכן:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

נתון v_i בת"ל ולכן $\forall \alpha_i = 0$.

.2

תהי $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

א. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של העתקה.

ב. האם העתקה חח"ע? האם היא על?

פתרון

$$kerT = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{מרחב הפתרונות} \\ Ax = 0 \text{ של} \end{matrix}\right\} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z = t$ ומכאן $x = t, y = -2t$. לסיכום $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

בסיס לגרעין: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ומימדו 1. היות והגרעין לא מכיל רק את וקטור האפס לכן לפי המשפט דלעיל העתקה לא חח"ע.

לפי משפט המימדים

$dimkerT + dimImT = dimV \to dimImT = 3 - 1 = 2 = dim\mathbb{R}^2$, לכן העתקה היא על.

נמצא בסיס לתמונה:

$$ImT=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{x\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{מרחב העמודות}\\ \text{של } A\end{matrix}\right\}$$

קבלנו 3 וקטורים ב $\mathbb{R}^2$ ולכן ברור שלפחות אחד מהם מיותר. כבסיס לתמונה נבחר $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

(כמובן שניתן לבחור כל 2 מתוך 3 הווקטורים הנ"ל). ואכן המימד של התמונה הוא 2.

הכללה

ט"ל מהצורה $T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\quad T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, A_{m\times n}$

$$kerT=\left\{\begin{matrix}\text{מרחב הפתרונות}\\ \text{של } Ax=0\end{matrix}\right\},\qquad dimkerT=n-r(A)$$

$$ImT=\left\{\begin{matrix}\text{מרחב העמודות}\\ \text{של } A\end{matrix}\right\},\qquad dimImT=r(A)$$

משפט $T:V\to W$ ט"ל כך ש $dimV=dimW$ אז T חח"ע $\leftrightarrow$ על T

הוכחה: ע"פ משפט הממדים $dimkerT+dimImT=dimV=dimW$)

אם $T:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ (אופרטור לינארי) ניתן להגדיר $T^2:V\to V$ כאשר $T^2(v)=T(T(v))$.

דוג'

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}\ \rightarrow\ T^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{T}\left(\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\mathrm{T}\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\4y\end{pmatrix}$$

תרגילים

1. נתון $T:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$, $V\neq\{0\}$ בנוסף $kerT=ImT$

א. הוכיחו כי $T \neq 0$

ב. $T^2 = 0$

פתרון

א. נניח בשלילה $T = 0$ אז $ImT = 0$ ולפי הנתון $kerT = \mathrm{Im}T$ נקבל שגם $kerT = 0$.

לפי משפט המימדים $dimV = 0$ ז"א $V \neq \{0\}$ בסתירה לנתון.

ב. $T^2(x) = T\big(T(x)\big) = 0$

$kerT = ImT \ni T(x)$

משפט

יהי V, W שני מ"ו מעל אותו שדה F. ויהי $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ בסיס של V.

$\{w_1, w_2, \cdots w_n\}$ קבוצה כלשהי של W. אזיי קיימת ט"ל יחידה המקיימת

$1 \leq i \leq n, T(v_i) = w_i$.

מסקנה (בניית ט"ל ע"פ גרעין ותמונה נתונים)

אם $V \supseteq A$ ו - $W \supseteq B$ תמ"ו כך ש $dim\mathrm{V} = \mathrm{dimA} + \mathrm{dimB}$

אזיי קיימת ט"ל כך ש $kerT = \mathrm{A}, ImT = B$.

את T נבנה בדרך הבאה:

$$
\begin{array}{rl}
\text{בסיס ל A} & \left\{\begin{array}{l} a_1 \to 0 \\ \vdots \\ a_k \to 0 \end{array}\right. \\
\text{השלמה של A לבסיס של V} & \left\{\begin{array}{l} a_{k+1} \to b_1 \\ \vdots \\ a_n \to b_{n-k} \end{array}\right\} \text{בסיס ל B}
\end{array}
$$

תרגילים

1. מצא ט״ל $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ כך ש $kerT = ImT = (a\ a\ b\ b)$.

פתרון

<u>שלב 1</u> - מציאת בסיס לגרעין ולתמונה $(a\ a\ b\ b) = a(1\ 1\ 0\ 0) + b(0\ 0\ 1\ 1)$.

<u>שלב 2</u>

נשלח את הבסיס של הגרעין ל $0 -$.

נשלים את הבסיס של הגרעין לבסיס של V .

נשלח את ההשלמה לבסיס של התמונה.

בסיס לגרעין

$$\begin{array}{l}(1\ 1\ 0\ 0) \to (0\ 0\ 0\ 0)\\(0\ 0\ 1\ 1) \to (0\ 0\ 0\ 0)\end{array}$$

השלמה של בסיס הגרעין לבסיס של V

$$\left.\begin{array}{l}(1\ 0\ 0\ 0) \to (1\ 1\ 0\ 0)\\(0\ 0\ 1\ 0) \to (0\ 0\ 1\ 1)\end{array}\right\}$$

בסיס לתמונה

הערה – ישנן עוד השלמות

<u>שלב 3</u>

נמצא את T על איבר כללי של V.

$$T(x\ y\ z\ w) = T\big(x(1\ 0\ 0\ 0) + y(0\ 1\ 0\ 0) + z(0\ 0\ 1\ 0) + w(0\ 0\ 0\ 1)\big)$$

$$= xT(1\ 0\ 0\ 0) + yT(0\ 1\ 0\ 0) + zT(0\ 0\ 1\ 0) + wT(0\ 0\ 0\ 1)$$

לפי שלב 2 הביטויים הצבועים באדום ידועים, נשאר לנו למצוא את שני הביטויים האחרים.

$$(0\ 1\ 0\ 0) = (1\ 1\ 0\ 0) - (1\ 0\ 0\ 0)\ \to T(0\ 1\ 0\ 0) = T(1\ 1\ 0\ 0) - T(1\ 0\ 0\ 0) = (-1 - 1\ 0\ 0)$$

$$(0\ 0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 1\ 1) - (0\ 0\ 1\ 0)\ \to T(0\ 0\ 0\ 1) = T(0\ 0\ 1\ 1) - T(0\ 0\ 1\ 0) = (0\ 0 - 1 - 1)$$

לכן:

$$T(x\ y\ z\ w) = x(1\ 1\ 0\ 0) + y(-1 - 1\ 0\ 0) + z(0\ 0\ 1\ 1) + w(0\ 0 - 1 - 1)$$

$$= (x - y, x - y, z - w, z - w)$$

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y\\ x-y\\ z-w\\ z-w\end{pmatrix}$$

ומתקיים ה$kerT = ImT = (a\ a\ b\ b)$.

2.

מצאו $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש $kerT \subseteq ImT = \{(a\ b\ a)\}$.

פתרון

בסיס לתמונה: $(0\ 1\ 0), (1\ 0\ 1)$ נבחר בסיס לגרעין את $(0\ 1\ 0)$. נשים לב שכדי שמשפט הממדים יתקיים מימד הגרעין צריך להיות 1.

$$\begin{cases} (0\ 1\ 0) \to (0\ 0\ 0) \\ (1\ 0\ 0) \to (1\ 0\ 1) \\ (0\ 0\ 1) \to (0\ 1\ 0) \end{cases}$$

בסיס לגרעין

השלמה ל $\mathbb{R}^3$

בסיס לתמונה

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ z\\ x\end{pmatrix}$$

3. האם קיימת העתקה לינארית $T: M_2(\mathbb{R}) \to P_1[x]$ כך ש $kerT = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

לא, לפי הנתון $dimkerT = 1$ לפי משפט המימדים $\underbrace{dimkerT}_{1} + \underbrace{dimImT}_{3} = \underbrace{dimV}_{4}$

אבל $ImT \subseteq P_1[x]$ שמימדו 2.

4. האם קיימת ט״ל $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש $\begin{cases} (1\ 0\ 0) \to (8\ 5\ 9) \\ (1\ 1\ 0) \to (6\ 6\ 6) \\ (1\ 1\ 1) \to (\frac{\pi}{2}\ e^2\ 8) \end{cases}$?

כן, לפי המשפט דלעיל $\{(1\ 0\ 0), (1\ 1\ 0), (1\ 1\ 1)\}$ בסיס ל V.

קבוצה ב W ולכן קיימת ט"ל יחידה כזו. $\left\{(8\ 5\ 9, (6\ 6\ 6), (\frac{\pi}{2}\ e^2\ 8)\right\}$

5. האם קיימת ט"ל $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כל ש $\begin{cases}(1\ 0\ 0) \to (8\ 8\ 8)\\(0\ 1\ 0) \to (9\ 9\ 9)\\(1\ 1\ 0) \to (7\ 7\ 7)\end{cases}$?

לא, לא מתקיים $T(u+v) = \mathrm{T(u)} + \mathrm{T(v)}$ כי

$$T[(1\ 0\ 0) + (0\ 1\ 0)] = (8\ 8\ 8) + (9\ 9\ 9) = (17\ 17\ 17)$$

אבל $T(1\ 1\ 0) = (7\ 7\ 7)$.

6. האם קיימת ט"ל כך ש $T: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7,\ kerT = ImT$

לא, כי לפי משפט המימדים נקבל $dimkerT = dimImT = \frac{1}{2}dimV = 3\frac{1}{2}$

7. האם קיימת ט"ל כך ש $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ kerT = ImT$

כן, (לא יחידה) למשל: $kerT = ImT = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$,

בסיס לגרעין $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

השלמה ל $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ בסיס לתמונה

ולכן העתקה היא:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$$

8. תהי $T: V \to V$ ט"ל הוכיחו

א) $kerT \subseteq kerT^2$

ב) $ImT \supseteq ImT^2$

ג) אם נתון $kerT = kerT^2$ אז $kerT \oplus \mathrm{ImT} = \mathrm{V}$

פתרון

א.

נניח $v \in kerT$ לכן $T(v) = 0$ ← $T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$ ז״א $v \in ker\,T^2$.

ב. נניח $v \in ImT^2$ לכן קיים $w \in V$ כך ש $T^2(w) = v$ ← $T(\underbrace{T(w)}_{z}) = v$

ז״א $T(z) = v$ ← $v \in ImT$.

ג.

צ״ל $\begin{cases} kerT + \mathrm{ImT} = V \\ kerT \cap \mathrm{ImT} = 0 \end{cases}$

לפי משפט המימדים של מרחבים וקטורים:

$$\dim(kerT + ImT) = dimkerT + dimImT - \dim(kerT \cap ImT)$$

מצד שני לפי משפט הממדים של העתקה לינארית (גרעין ותמונה): $dimkerT + dimImT = dimV$

ולכן משילוב שני המשפטים מספיק להוכיח $\dim(kerT \cap ImT) = 0$

נבחר $v \in kerT \cap \mathrm{ImT}$ ונראה שבהכרח $v = \{0\}$.

$v \in ImT$ לכן קיים $x \in V$ כך ש $T(x) = v$ ← $T^2(x) = T(T(x)) = 0$

$v = T(x) \in kerT \cap \mathrm{ImT}$

נתון $kerT = kerT^2$ ולכן $x \in kerT = kerT^2$. מכאן $T(x) = v = 0$.

לכן $\{0\} = kerT \cap \mathrm{ImT}$.

סיכום $\boldsymbol{T: V \to U}$

- אם $\boldsymbol{dimV < dimU}$ אז **T** לא יכולה להיות על.
- אם $\boldsymbol{dimV > dimU}$ אז **T** לא יכולה להיות חח"ע.

הוכחה ע״פ משפט הממדים $dimkerT + dimImT = dimV$