מערכת משוואות ליניאריות

מערכת הומוגנית

דוג 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

הערה : פעולות הדרוג שומרות על פתרון המערכת.

נתרגם למשוואות את המטריצה הימנית.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה האחרונה מתקבל $x_4 = 0$ נציב את התוצאה במשוואה הלפני האחרונה

ונקבל $x_3 = 0$. נציב במשוואה השניה ונקבל $x_2 = 0$ והצבה במשוואה הראשונה תיתן $x_1 = 0$.

לסיכום קבלנו פתרון יחיד למערכת (פתרון טריוויאלי) : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

דוג 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 0\\ 5 & 5 & 6 & | & 0\\ 2 & 2 & 3 & | & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

נגדיר **משתנה חופשי** כמשתנה אשר אין לו מקדם מוביל (שונה מאפס) בצורה המדורגת של המטריצה. במקרה שלנו ל x_2 הוא משתנה חופשי. מקובל לסמן את המשתנה החופשי כפרמטר (t).

נסמן $x_2 = t$ ונקבל את ערכי שאר המשתנים : $x_3 = 0,\ x_1 = -t$

לסיכום פתרון המערכת : $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\\ t\\ 0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. לכל ערך של t נקבל פתרון שונה לכן למערכת יש אינסוף פתרונות.

מסקנה: למע' הומוגנית יכול להיות א) פתרון יחיד. ב) אינסוף פתרונות.

מערכת לא הומוגנית

דוג 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7\\ 2x_2 + 4x_3 = 2\\ x_1 + x_3 = 5\end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 7\\ 0 & 2 & 4 & | & 2\\ 1 & 0 & 1 & | & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 7\\ 0 & 2 & 4 & | & 2\\ 0 & -1 & 0 & | & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 7\\ 0 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 2 & | & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 7\\ 0 & 1 & 0 & | & 2\\ 0 & 0 & 2 & | & -1\end{pmatrix}$$

מהמשוואה האחרונה נקבל $x_3 = -0.5$ מהמשוואה השנייה $x_2 = 2$ ומהמשוואה הראשונה (לאחר הצבה) : $x_1 = 5.5$.

לסיכום פתרון המערכת : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ - פתרון יחיד.

דוג 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

x_4 משתנה חופשי ולכן נסמנו $x_4 = t$ מהמשוואה השלישית $x_3 = 4t + 2$ מהמשוואה השנייה

$x_2 = 2(4t+2) - 4t - 2 = 4t + 2$ ומהמשוואה הראשונה

$$x_1 = -(4t+2) + (4t+2) - t = -t$$

לסיכום פתרון המערכת : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 4t+2 \\ 4t+2 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ אינסוף פתרונות (כתלות

בפרמטר t).

פתרון למערכת
ההומוגנית המתאימה

פתרון פרטי למערכת
הלא הומוגנית

דוג 3

נרשום את המערכת ישירות ע״י מטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2&2&5&3&19\\ 1&1&1&1&5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&5\\ 2&2&5&3&19 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&5\\ 0&0&3&1&9 \end{array}\right)$$

הפעם יש לנו שני משתנים חופשיים , נסמן: $x_4 = t, x_2 = s$ מהמשוואה השנייה נקבל:

$x_3 = \frac{-t}{3} + 3$ ומהמשוואה הראשונה $x_1 = -s - \left(\frac{-t}{3} + 3\right) - t + 5 = -s - \frac{2t}{3} + 2$

לסיכום פתרון המערכת: $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-\frac{2t}{3}+2\\ s\\ \frac{-t}{3}+3\\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\\ 0\\ -\frac{1}{3}\\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 3\\ 0 \end{pmatrix}$ אינסוף

פתרונות (כתלות בשני פרמטרים t, s).

דוג 4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ x_2 + 3x_3 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0\\ 0&1&3&0&2\\ 2&3&5&2&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0\\ 0&1&3&0&2\\ 0&1&3&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0\\ 0&1&3&0&2\\ 0&0&0&0&-1 \end{array}\right)$$

השורה השלישית שקולה למשוואה $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$ ולכן אין למערכת פתרון.

מסקנה: למע' לא הומוגנית יכול להיות א) פתרון יחיד. ב) אינסוף פתרונות (עם מספר דרגות חופש). ג) אין פתרון.

ניתוח פתרון של מערכות ליניאריות

מע' הומוגנית

למע' הומוגנית תמיד יש פתרון. צריך להבדיל מתי יש פתרון יחיד ומתי יש אינסוף פתרונות.

למע' $Ax = 0$ עם n נעלמים:

- **פתרון יחיד אם:** $r(A) = n$
- **אינסוף פתרונות אם:** $r(A) < n$ **ואז** $n - r(A) =$ **דרגות החופש**

מע' לא הומוגנית

במערכת לא הומוגנית יכולה להיות סתירה בין המשוואות ואז אין פתרון.

למע' $Ax = b,\ b \neq 0$ עם n נעלמים:

- **פתרון יחיד אם:** $r(A) = r(A|b) = n$
- **אינסוף פתרונות אם:** $r(A) = r(A|b) < n$
- **אין פתרון אם:** $r(A) < r(A|b)$

אין סתירה במערכת

יש סתירה במערכת

תרגילים

1. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה: א) אין פתרון ב) אינסוף פתרונות ג) פתרון יחיד.

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right)$$

sgershon@technion.ac.il

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | -3 \\ 0 & 1 & 0.5(k+3) & | \quad 2 \\ 0 & k & 5 & | \quad 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - kR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | -3 \\ 0 & 1 & 0.5(k+3) & | \quad 2 \\ 0 & 0 & 5 - 0.5k(k+3) & | \quad 4-2k \end{pmatrix}$$

נבדוק מתי המקדם המוביל שתלוי בפרמטר (במקרה שלנו רק במשוואה השלישית) מתאפס.

$$5 - \frac{k(k+3)}{2} = 0 \;\to\; k^2 + 3k - 10 = 0 \;\to k = -5{,}2$$

שקול לתנאי	מצב המטריצה	ערך הפרמטר k
$r(A) = r(A\|b) = 3$	אף שורה לא מתאפסת ב A לכן פתרון יחיד	$k \neq -5, 2$
$r(A) < r(A\|b) = 3$	נקבל בשורה האחרונה $0 \quad 0 \quad 0 \quad \| \; 14$ אין פתרון	$k = -5$
$r(A) = r(A\|b) < 3$	נקבל בשורה האחרונה $0 \quad 0 \quad 0 \quad \| \; 0$ אינסוף פתרונות (עם דרגת חופש אחת)	$k = 2$

.

2. א. לאילו ערכי a יש למערכת הבאה : א) אין פתרון ב) אינסוף פתרונות ג) פתרון יחיד.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 & a+3 \\ 2 & a^2-a & a^2+a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a^2-a & a^2+a-2 & 2a-2 & 3a-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 2a-2 & 2a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

בכל מקרה $rank(A) < 4$ ולכן אין פתרון יחיד.

יש שני מקדמים מובילים התלויים בפרמטר a. נבדוק מה קורה עבור על ערך של a המאפס אותם.

ערך הפרמטר a	מצב המטריצה	שקול לתנאי
$\boldsymbol{a \neq 1, 0}$	רק השורה השלישית מתאפסת אינסוף פתרונות (עם דרגת חופש אחת)	$r(A) = r(A\|b) = 3 < 4 = n$
$\boldsymbol{a = 1}$	השורה השלישית מתאפסת אבל בשורה השנייה נקבל $0 \quad 0 \quad 0 \quad \| \; 1$ אין פתרון	$1 = \mathrm{r(A)} < \mathrm{r(A\|b)} = 2$
$\boldsymbol{a = 0}$	השורה השנייה מתאפסת השורה השלישית לא מתאפסת, אין סתירה אינסוף פתרונות (עם שתי דרגות חופש)	$\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A\|b)} = 2$

ב. מהו הפתרון עבור $a = 0$?

נחזור למטריצה המדורגת ונציב $a = 0$ מתקבלת המטריצה $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

נסמן: $x_4 = t, x_2 = s$ מהמשוואה השלישית נקבל: $x_3 = -t + 1$ ומהמשוואה הראשונה

$x_1 = 4 - 2t$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ s \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. נתונה מערכת בשלושה נעלמים (x, y, z) ושני פרמטרים (a, b) מצאו לאילו ערכי a, b יש למערכת הבאה: א) אין פתרון ב) אינסוף פתרונות ג) פתרון יחיד ד) מצאו פתרון כללי למערכת בכל המקרים בהם יש אינסוף פתרונות למערכת.

$$\begin{cases} x - 2y + z = b \\ 2x + (a-4)y + 14z = 8 - 4b \\ 3x + (a-6)y + (2a+21)z = 9 - 6b \end{cases}$$

נרשום בעזרת מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 2 & a-4 & 14 & 8-4b \\ 3 & a-6 & 2a+21 & 9-6b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & a & 12 & 8-6b \\ 0 & a & 2(a+9) & 9-9b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & a & 12 & 8-6b \\ 0 & 0 & 2(a+3) & 1-3b \end{array}\right)$$

עבור $a = 0$ המטריצה עדיין לא מדורגת, נמשיך לדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 12 & 8-6b \\ 0 & 0 & 6 & 1-3b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 12 & 8-6b \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

ז"א שאין פתרון עבור $a = 0$ (לכל ערך b) – סתירה במשוואה השלישית.

עבור $a \neq 0$ המטריצה מדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & a & 12 & 8-6b \\ 0 & 0 & 2(a+3) & 1-3b \end{array}\right)$$

עבור $a=-3, b=\frac{1}{3}$ נקבל $r(A)=r(A|b)=2<n=3$ ולכן אינסוף פתרונות.

עבור $a=-3, b\neq\frac{1}{3}$ נקבל $r(A)=2<r(A|b)=3$ ולכן אין פתרון.

עבור כלשהו $a\neq 0,-3, b$ נקבל $r(A)=r(A|b)=n=3$ ולכן פתרון יחיד.

ערך הפרמטרים $a.b$	מצב המטריצה	שקול לתנאי
כלשהו $a\neq 0,-3, b$	אף שורה לא מתאפסת ב A לכן פתרון יחיד	$r(A)=r(A\|b)=3$
כלשהו $a=0, b$	אין פתרון	$2=\mathrm{r(A)}<\mathrm{r(A\|b)}=3$
$a=-3, b=\frac{1}{3}$	אינסוף פתרונות (עם דרגת חופש אחת)	$\mathrm{r(A)}=\mathrm{r(A\|b)}=2<n=3$
$a=-3, b\neq\frac{1}{3}$	אין פתרון	$r(A)=2<r(A\|b)=3$

נמצא פתרון כללי עבור המקרה $a=-3, b=\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1/3 \\ 0 & -3 & 12 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z=t$ מהמשוואה השנייה נקבל $y=4t-2$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $x=2(4t-2)-t+\frac{1}{3}=7t-3\frac{2}{3}$.

לסיכום:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7t-3\frac{2}{3} \\ 4t-2 \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. א. כמה פתרונות למערכת $A_{2\times3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_{2\times1}$?

פתרון : המערכת הומוגנית ולכן תמיד קיים פתרון. $r(A)\le 2<3=n$ ולכן ∞ פתרונות.

ב. אם המערכת לא הייתה הומוגנית עם וקטור פתרונות $c=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$?

פתרון : עדיין מס' הנעלמים גדול מדרגת המטר' אבל יתכן וקיימת סתירה בין המשוואות ,

למשל: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\3&6&9&2\end{array}\right)$ ז"א אין פתרון יחיד אבל יתכן ואין פתרון או אינסוף פתרונות.

4. כמה פתרונות למערכת $A_{3\times4}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}$ אם נתון $A_{3\times4}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}$?

פתרון : נשים לב $r(A)\le 3<4=n$ ולכן אין פתרון יחיד. לא יתכן וקיימת סתירה בין המשוואות כי נתון פתרון למערכת ולכן ∞ פתרונות.

5. A מטריצה מסדר 4x4 ונתון $v_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\2\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ הם פתרונות של המערכת $Ax=0$. בנוסף נתון $\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\3\end{pmatrix}$ פתרון המערכת $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

א. מהי דרגת A? ב. מצאו פתרון כללי למערכת $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. ג. מצאו הצגה קנונית של A.

פתרון

א. נבדוק האם פתרונות המערכת תלויים אחד בשני ע"י דירוגם במטריצה.

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&4&0&2\\2&3&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&4&0&2\\0&-1&0&5\end{pmatrix}$$

2 השורות האחרונות לא פרופ' ולכן הפתרונות לא תלויים זה בזה. ולכן

$$r(A) \leq n - \frac{\text{דרגות}}{\text{החופש}} = 4 - 3 = 1$$

ז"א שדרגת המטריצה היא 1 או 0. אם הדרגה היא 0 ז"א ש A מטריצת האפס, אבל נתון

שקיים פתרון למער' $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן $r(A) = 1$.

ב. ראינו כי **פתרון למערכת הלא הומוגנית =**

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית + פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית

לכן במקרה שלנו $r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ג. דרגת המטריצה אחת ולכן צריך למצוא

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשתמש בפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} 2a + 3b - 2c + d = 0 \\ 4b + 2d = 0 \\ a + 2b - c - 2d = 0 \end{cases} \rightarrow \cdots \rightarrow a = c, b = d = 0$$

לכן $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.

הוכח / הפרך

1. אם ל $Ax = b$ אין פתרון אז למערכת $Ax = 0$ יש ∞ פתרונות.

לא (שימו לב לא נתון שהמטריצה ריבועית), תיתכן סתירה במערכת הלא הומוגנית, דוג' :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=7 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$$

2. ל $Ax=b$ יש ∞ פתרונות אז למערכת $Ax=c$ יש∞ פתרונות.

לא, תיתכן סתירה במערכת הלא הומוגנית החדשה, דוג׳:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \text{ אבל } \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$$

3. ל A ריבועית ול $Ax=b$ אין פתרון האם למערכת $Ax=0$ יש ∞ פתרונות?

ידוע שלמערכת הלא הומוגנית אין פתרון ז״א $r(A)<r(A|b)$ ז״א שאחת משורות A התאפסה ולכן מס׳ השורות קטן ממספר הנעלמים (מטי ריבועית) ולכן יש ∞ פתרונות למע׳ ההומוגנית.

4. ל $Ax=0$ ∞ פתרונות אז למערכת $Ax=b$ יש ∞ פתרונות.

לא בהכרח, דוג׳: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ עבור $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ אין פתרון אבל עבור $c=\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ יש ∞ פתרונות.

5. $Ax=0$ ∞ פתרונות לא יתכן למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.

הוכחה: למע׳ ההומוגנית ∞ פתרונות לכן $r(A)<n$ אם ל $Ax=b$ פתרון יחיד אזי״ $r(A)=r(A|b)=n$ בסתירה לנתון.

6. ל $Ax=0$ פתרון יחיד האם ל $A^tx=0$ פתרון יחיד?

נשים לב: לא נתון A מטי ריבועית ולא חייב להיות אותו x.

דוג׳ נגדית:

$A_{3\times 2}$ קיים פתרון יחיד לכן $\mathrm{r(A)}=2$

${A^t}_{2\times 3}$ ללא קשר לדרגת A^t מתקיים $\mathrm{r}(A^t)\le 2<3=\mathrm{n}$ ולכן יש ∞ פתרונות.

בדקו למשל את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$.

7. אם $A_{m\times n}$ ו $\mathrm{r(A)}=m$ אז למערכת $Ax=b$ קיים פתרון לכל b.

הוכחה: $\mathrm{r(A)}=m$ ול A יש m שורות, ז"א שאף שורה לא התאפסה ב A במהלך הדרוג. ולכן לא יתכן לקבל סתירה בין המשוואות (מצב מהצורה $r(A)<r(A|b)$). אם אין סתירה אז או שיש פתרון יחיד ($m=n$) או אינסוף פתרונות ($m<n$) בכל מקרה יש פתרון.

8. $A_{m\times n}$ ו $\mathrm{r(A)}=n$ אז למערכת $Ax=b$ קיים פתרון לכל b.

לא נכון, אם $\mathrm{m}>\mathrm{n}$ ז"א שלפחות אחת השורה התאפסה ואז תיתכן סתירה.

דוג' $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$ מתקיים $r(\mathrm{A})=n=2$ עבור $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ אין פתרון למע' $Ax=b$.

הערה: במידה ויהיה נתון שקיים פתרון, אז הוא יהיה יחיד, כי $r(A)=r(A|b)=n$.

נתון בשאלה

נתון שקיים פתרון