מרחבים וקטורים

הגדרה: **מרחב וקטורי** הוא קבוצה V עם 2 פעולות. פעולת חיבור בין אברי V שתסומן ב $+$ ופעולת כפל בסקלר בין איבר מהקבוצה V לאיבר בשדה F שתסומן ב $\cdot$.

V נקרא מרחב וקטורי מעל שדה F אם מתקיימות 10 הדרישות הבאות.

דרישות של מרחב וקטורי

• סגירות לחיבור $v_1 + v_2 \in V$	• סגירות לכפל $\alpha \cdot v \in V$
• אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ): $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$	• דיסטריבוטיביות (חוק הפילוג): $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$
• קיים אדיש $v_0 \in V$ כך ש $\mathrm{v} + v_0 = v$	• $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
• קיים נגדי ל v $\bar{v} \in V$ כך ש $\mathrm{v} + \bar{v} = v_0$	• $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
• קומוטטיביות: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$	• $1 \cdot v = v$

תרגילים

1. יהי $V = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}, \ \mathrm{F} = \mathbb{R}$ עם הפעולות הבאות:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2), \qquad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y)$$

האם V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הללו?

פתרון נבדוק שכל 10 הדרישות מתקיימות.

חמש הדרישות של החיבור:

<u>דרישה ראשונה-סגירות לחיבור</u>:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (\underbrace{x_1 + x_2 - 1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathrm{V}$$

<u>דרישה שניה-אסוציאטיביות</u>:

$$[(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \oplus (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)]$$

נחשב את אגף שמאל (ע״פ הגדרת החיבור המיוחד בתרגיל)

$$[(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)] \oplus (x_3,y_3) = (x_1+x_2-1, y_1+y_2) \oplus (x_3,y_3)$$

$$= (x_1+x_2-1+x_3-1, y_1+y_2+y_3) = (x_1+x_2+x_3-2, y_1+y_2+y_3)$$

נעבור לאגף ימין:

$$(x_1,y_1) \oplus [(x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3)] = (x_1,y_1) \oplus (x_2+x_3-1, y_2+y_3)$$

$$= (x_1+x_2+x_3-1-1, y_1+y_2+y_3) = (x_1+x_2+x_3-2, y_1+y_2+y_3)$$

<u>דרישה שלישית- קיום אדיש</u>:

נסמן את האדיש של V ב (x_0,y_0) ונמצא אותו, נדרוש:

$$(x,y) \oplus (x_0,y_0) = (x,y)$$

$$(\mathrm{x}+x_0-1, y+y_0) = (\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}+x_0-1 = x \\ y+y_0 = y \end{cases} \rightarrow x_0 = 1, y_0 = 0$$

האדיש הוא $(1,0) \in \mathrm{V}$.

<u>דרישה רביעית- קיום נגדי</u>:

נסמן את הנגדי ל (x,y) ב $(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})$ ונמצא אותו ע״י הדרישה:

$$(x,y) \oplus (\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}}) = (x_0,y_0) = (1,0)$$

$$(\mathrm{x}+\bar{\mathrm{x}}-1, y+\bar{\mathrm{y}}) = (1,0) \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}+\bar{\mathrm{x}}-1 = 1 \\ y+\bar{\mathrm{y}} = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{\mathrm{x}} = 2-x, \bar{\mathrm{y}} = -y$$

הנגדי הוא $V \ni (2-x,-y) \ni (\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})$.

<u>דרישה חמישית- קומטטיביות</u>:

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_2,y_2) \oplus (x_1,y_1)$$

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2-1, y_1+y_2) = (x_2+x_1-1, y_2+y_1)$$

$$= (x_2,y_2) \oplus (x_1,y_1)$$

נעבור לחמש הדרישות של הכפל

<u>דרישה ראשונה-סגירות לכפל</u>:

$$\alpha\odot(x,y)=(\underbrace{\alpha x-\alpha+1}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}})\in V$$

<u>דרישה שניה – דיסטריבוטיביות של וקטורים</u>:

$$\alpha\odot[(x_1,y_1)\oplus\ (x_2,y_2)]=[\alpha\odot(x_1,y_1])\oplus[\alpha\odot(x_2,y_2)]$$

נתחיל בחישוב אגף שמאל:

$$\alpha\odot[(x_1,y_1)\oplus\ (x_2,y_2)]=\alpha\odot(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$$

$$=\big(\alpha(x_1+x_2-1)-\alpha+1,\alpha(y_1+y_2)\big)=$$

$$=(\alpha x_1+\alpha x_2-\alpha-\alpha+1,\alpha y_1+\alpha y_2)=(\alpha x_1+\alpha x_2-2\alpha+1,\alpha y_1+\alpha y_2)$$

אגף ימין:

$$[\alpha\odot(x_1,y_1)]\oplus[\alpha\odot(x_2,y_2)]=[(\alpha x_1-\alpha+1,\alpha y_1)]\oplus[(\alpha x_2-\alpha+1,\alpha y_2)]=$$

$$(\alpha x_1-\alpha+1+\alpha x_2-\alpha+1-1,\alpha y_1+\alpha y_2)=(\alpha x_1+\alpha x_2-2\alpha+1,\alpha y_1+\alpha y_2)$$

<u>דרישה שלישית - דיסטריבוטיביות של סקלרים</u>:

$$(\alpha+\beta)\odot(x,y)=[\alpha\odot(x,y)]\oplus[\beta\odot(x,y)]$$

אגף שמאל:

$$(\alpha+\beta)\odot(x,y)=((\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)+1,(\alpha+\beta)y)$$

אגף ימין:

$$[\alpha\odot(x,y)]\oplus[\beta\odot(x,y)]=(\alpha x-\alpha+1,\alpha y)\oplus(\beta x-\beta+1,\beta y)$$

$$=(\alpha x-\alpha+1+\beta x-\beta+1-1,\alpha y+\beta y)$$

$$=((\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)+1,(\alpha+\beta)y)$$

<u>דרישה רביעית -אסוציאטיביות (של סקלרים)</u> :

$$(\alpha\beta)\odot v = \alpha\odot(\beta\odot v)$$

צד שמאל :

$$(\alpha\beta)\odot(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (\alpha\beta x - \alpha\beta + 1, \alpha\beta y)$$

צד ימין :

$$\alpha\odot\big(\beta\odot(x,y)\big) = \alpha\odot(\beta x - \beta + 1, \beta y) = (\alpha\beta x - \alpha\beta + \alpha - \alpha + 1, \alpha\beta y)$$

$$= (\alpha\beta x - \alpha\beta + 1, \alpha\beta y)$$

<u>דרישה חמישית – אדיש כפלי, נבדוק שמתקיים</u> :

$$1\odot(x,y) = (x,y)$$

נתחיל מאגף שמאל ונסיים באגף ימין :

$$1\odot(x,y) = (x - 1 + 1, y) = (x,y)$$

10 הדרישות מתקיימות ולכן V מ״ו מעל F ביחס לפעולות שהוגדרו.

2. יהי $\mathrm{F} = \mathbb{R}$, $V = \{\text{מספרים ממשיים חיוביים}\}$ עם הפעולות הבאות :

$$u \oplus v = \mathrm{u}\cdot\mathrm{v}, \qquad \alpha\odot u = u^{\alpha}$$

מצאו אדיש ונגדי (בדקו שאכן V מ״ו מעל F ביחס לפעולות שהוגדרו).

פתרון

נסמן אדיש ב u_0 ונדרוש $u \oplus u_0 = \mathrm{u}$

$$u \oplus u_0 = \mathrm{u}\cdot u_0 = u$$

נחלק ב u (u מספר חיובי ולכן אין חשש לחלוקה ב 0).

$$u_0 = 1$$

האדיש הוא 1 (שייך למרחב V).

נסמן את הנגדי ב $\bar{u}$ ונדרוש $u \oplus \bar{u} = u_0 = 1$

$$u \oplus \bar{u} = \mathrm{u} \cdot \bar{u} = 1$$

נחלק ב u (u מספר חיובי ולכן אין חשש לחלוקה ב 0).

$$\bar{u} = \frac{1}{u}$$

הנגדי הוא $\frac{1}{u}$ (שייך למרחב V).

מרחבים וקטורים ידועים

א. וקטורים

קבוצה	שדה	פעולות	הערות
$V = \mathbb{R}^n$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	$V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{C}$ עם הפעולות הרגילות הוא לא מ"ו. למשל $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, i \in F$ אין סגירות לכפל בסקלר $i\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \notin V$
$V = \mathbb{C}^n$	$F = \mathbb{C}$	הפעולות הרגילות	
$V = \mathbb{C}^n$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	

ב. מטריצות

קבוצה	שדה	פעולות	הערות
$V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	$V = M_{m\times n}(\mathbb{R}), F = \mathbb{C}$ עם הפעולות הרגילות הוא לא מ"ו. למשל $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, i \in F$ אין סגירות לכפל בסקלר $i\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \notin V$
$V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$	$F = \mathbb{C}$	הפעולות הרגילות	
$V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	

ג. פולינומים

קבוצה	שדה	פעולות	הערות
$\boldsymbol{V = \mathbb{R}_n[x]}$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	$V = \mathbb{R}_n[x], F = \mathbb{C}$ עם הפעולות הרגילות הוא לא מ"ו. למשל $V =$ $2x, i \in F$ אין סגירות לכפל בסקלר $2xi \cancel{\in} V$
$\boldsymbol{V = \mathbb{C}_n[x]}$	$F = \mathbb{C}$	הפעולות הרגילות	
$\boldsymbol{V = \mathbb{C}_n[x]}$	$F = \mathbb{R}$	הפעולות הרגילות	

ד. פונקציות

קבוצה	שדה	פעולות
$\boldsymbol{V} = \{$**פונקציות ממשיות ורציפות**$\}$ $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\mathrm{F} = \mathbb{R}$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$ $(\alpha \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ (הפעולות הרגילות)

תרגילים

1. $\mathrm{F} = \mathbb{R}$, $V = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ עם הפעולות הבאות:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \qquad \alpha \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

האם V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הללו?

פתרון: כיוון שהחיבור מוגדר "רגיל" סביר להניח ש 5 התכונות שלו יתקיימו ולכן נבדוק את תכונות הכפל.

נבדוק האם מתקיים: $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

נציב $\alpha = 2, \beta = 2, v = \binom{1}{1}$

אגף שמאל: $(2+2)\odot\binom{1}{1} = 4\odot\binom{1}{1} = \binom{16}{4}$

אגף ימין: $2\odot\binom{1}{1} \oplus 2\odot\binom{1}{1} = \binom{4}{2} \oplus \binom{4}{2} = \binom{8}{4}$

לא התקבל שוויון בין האגפים ולכן **לא** מ"ו.

2. $V = \mathbb{R}_2[x],\ \mathrm{F} = \mathbb{R}$ עם הפעולות הבאות:

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) \oplus\ (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2),$$

$$\alpha\odot(ax^2 + bx + c) = (ax^2 + \alpha bx + c)$$

האם V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הללו?

פתרון: מאותם שקולים נבדוק שוב את התכונה $(\alpha + \beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$.

נציב: $\alpha = 1, \beta = 1, v = 2x^2 + 3x + 5$

אגף שמאל:

$$(1+1)\odot(2x^2 + 3x + 5) = 2\odot(2x^2 + 3x + 5) = 2x^2 + 6x + 5$$

אגף ימין:

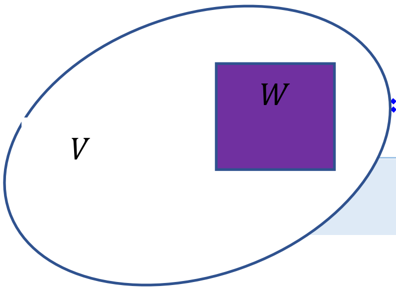
$$1\odot(2x^2 + 3x + 5) \oplus 1\odot(2x^2 + 3x + 5) = (2x^2 + 3x + 5) \oplus (2x^2 + 3x + 5) =$$

$$4x^2 + 6x + 10$$

לא התקבל שוויון בין האגפים ולכן **לא** מ"ו.

תתי מרחבים וקטורים

יהי V מ״ו מעל שדה F ו - W תת קבוצה של V. נאמר כי W **תת מרחב** (תמ״ו) של V אם W מ״ו בפני עצמו עם אותם פעולות של V.



משפט: V מ״ו מעל F ו - W תת קבוצה של V. W תמ״ו של V אמ״מ:

1. **$W \in 0$ (איבר האפס של המרחב V).**
2. **סגירות לחיבור: $u, v \in W \rightarrow u + v \in W$.**
3. **סגירות לכפל בסקלר: $u \in W,\ \alpha \in F \rightarrow \alpha u \in W$.**

הערות

במקום תנאים 2 ו 3 ניתן לדרוש: $u, v \in W,\ \alpha, \beta \in F\ \rightarrow\ \alpha u + \beta v \in W$

במקום תנאי 1 ניתן לדרוש שהמרחב W לא יהיה קיר – דהיינו שקיים בו איבר כלשהו, לאו דווקא ה 0.

תרגילים

1. $V = M_m(\mathbb{R}), F = \mathbb{R}$ (מטריצות ריבועיות) ו W – מטריצות אנטי סימטריות מאותו סדר.

הראו כי W תמ״ו של V.

פתרון

נראה שלושת התכונות של תמ״ו מתקיימות:

1. מרחב לא ריק $0 \in W$ מטריצת האפס היא מטריצה אנטי סימטרית.
2. סגירות לחיבור נניח $A, B \in W$ כלומר $A^t = -A, B^t = -B$ נראה $A + B \in W$ ז״א $A + B$ אנטי סימטרית.

$$(A + B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A + B) \in W$$

3. סגירות לכפל נניח $A \in W,\ \alpha \in F \rightarrow \alpha A \in W$

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -(\alpha A)\ \in W$$

שלושת הדרישות מתקיימות לכן W תמ״ו של V.

2. א. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $W = \{(x,y,z): x^2 + y^2 = 0\}$. האם W תמ״ו של V?

פתרון: נרשום את W בצורה שונה:

$$W = \{(x,y,z): x = 0, y = 0\} = (0,0,z)$$

שלושת הדרישות מתקיימות (בדקו!) ולכן תמ״ו של V.

ב. $V = \mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $W = \{(x,y,z): x^2 + y^2 = 0\}$. האם W תמ״ו של V?

נראה שאין סגירות לחיבור ולכן W לא תמ״ו של V.

$$i^2 + 1 = 0 \ \rightarrow \ (i,1,0) \in W$$

$$(-i)^2 + 1 = 0 \ \rightarrow \ (-i,1,0) \in W$$

אבל $(i,1,0) + (-i,1,0) = (0,2,0)$ אבל מתקיים $0^2 + 2^2 \neq 0$ ולכן

$(i,1,0) + (-i,1,0) \cancel{\in}$ W.

3. $V = M_2(\mathbb{R}), F = \mathbb{R}$ ו W – מטריצות שסכום אברי האלכסון הראשי שלהן שווה 0 = W
$\{A: tr(A) = 0\}$ האם W תמ״ו של V?

פתרון

- $0 \in \mathrm{W}$
- נניח $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{W}$ כלומר $\mathrm{tr(A)} = 0, \mathrm{tr(B)} = 0$ נראה $\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{W}$.

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0$$

- $A \in W,\ \alpha \in F$ נראה $\alpha A \in W$.

$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \cdot tr(A) = \alpha \cdot 0 = 0 \ \rightarrow \ \alpha A \in W$.

לכן W תמ״ו של V.

4. $V = \mathbb{R}_3[x]$, W - אוסף הפולינומים ב - V ש 7- הוא שורש שלהם. האם W **מ״ו** ?

פתרון :

מאחר ו - W תת קבוצה של מרחב ידוע $\mathbb{R}_3[x]$ לכן מספיק להראות ש - W תמ״ו של V ואז לפי הגדרה W מ״ו בפני עצמו.

נתון : $\mathrm{W = \{p(x) : p(-7) = 0\}}$

- פולינום האפס : $0 = p_0(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots$

  כל מספר הוא שורש של פולינום האפס ולכן $p_0(x) \in W$.
- $p(x), g(x) \in W$ נראה $(p+g)(x) \in W$

$(p+g)(-7) = p(-7) + g(-7) = 0 + 0 = 0 \ \rightarrow (p+g)(x) \in W$

- $p(x) \in W,\ \alpha \in F$ נראה $(\alpha p)(x) \in W$

$(\alpha p)(-7) = \alpha p(-7) = \alpha \cdot 0 = 0 \ \rightarrow \ (\alpha p)(x) \in W$

לכן W תמ״ו של V ואז לפי הגדרה W מ״ו בפני עצמו.

5.

א. $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ו - $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} : a > b\right\}$ האם W תמ״ו של V?

פתרון : לא, מטריצת האפס לא מוכלת ב - W.

ב. נשנה את ההגדרה של W ל $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} : a \geq b\right\}$ האם עכשיו W תמ״ו של V?

עדיין לא, אין סגירות לכפל בסקלר שלילי.

6. $V = P_3[x]$ ו W – כל הפולינומים ב V שיש להם לפחות שורש ממשי אחד. האם W תמ"ו של V?

- $0 \in W$, כל מס' הוא שורש של פולינום האפס (בפרט מס' ממשי).
- נראה שאין סגירות לחיבור: $x^2 + x, -x + 1 \in W$ אבל

$$(x^2 + x) + (-x + 1) = x^2 + 1 \notin W$$

7. $V = P_3[x]$ ו W – כל הפולינומים ממעלה 3. האם W תמ"ו של V?

לא, אין סגירות לחיבור: $x^3 + x, -x^3 + 1 \in W$

$$(x^3 + x) + (-x^3 + 1) = x + 1 \notin W$$

8. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, W – כל המטריצות ב V המתחלפות בכפל עם מט' נתונה m.

$$W = \{A \in V : Am = mA\}$$

- מטריצת האפס מתחלפת עם כל מטריצה ולכן: $0 \in W$.
- נניח $A, B \in W$ ז"א $Am = mA, Bm = mB$ נראה $A + B \in W$

$$(A + B)m = Am + Bm = mA + mB = m(A + B) \rightarrow (A + B) \in W$$

- $\alpha \in F$, $A \in W$ נראה $\alpha A \in W$:

$$(\alpha A)m = \alpha(Am) = \alpha(mA) = m(\alpha A) \rightarrow \alpha A \in W$$

9. אוסף כל המטריצות המדורגות = $W_{2\times 2}$.

לא, דוג׳ נגדית: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ אבל אין סגירות לחיבור.

הערה: באופן כללי כאשר אין איבר כללי המרחב הוא לא מרחב וקטורי.

חיתוך ואיחוד תתי מרחבים

יהיו U,W תמ״ו של V, אזיי נגדיר

חיתוך: $\boldsymbol{U \cap W = \{v \in V | v \in U \text{ וגם } v \in W\}}$

איחוד $\boldsymbol{U \cup W = \{v \in V | v \in U \text{ או } v \in W\}}$

טענה: <u>חיתוך תמ״ו הוא תמיד תמ״ו</u>.

הוכחה: יהיו U,W תמ״ו של V נראה $U \cap W$ תמ״ו.

- $0 \in W$ וגם $0 \in U$ כי כל אחד מהם הוא תמ״ו ולכן $0 \in U \cap W$.
- נניח $x,y \in U \cap W$ נראה $x+y \in U \cap W$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \in U \text{ כי } U \text{ תמ״ו} \\ x+y \in W \text{ כי } W \text{ תמ״ו} \end{array}\right\} \rightarrow x+y \in U \cap W$$

- נניח $x \in U \cap W, \alpha \in F$ נראה כי $\alpha x \in U \cap W$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x \in U \text{ כי } U \text{ תמ״ו} \\ \alpha x \in W \text{ כי W תמ״ו} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha\, x \in U \cap W$$

<u>איחוד תמ״ו בדר״כ לא תמ״ו</u>.

דוג׳: $W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : y = z\right\}, U = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x = y\right\}$

לכן $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in U, \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \in W$ אבל $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} \notin U \cup W$

טענה: יהי V מ״ו ו U,W תמ״ו של V אזיי $U \cup W$ תמ״ו של $V \leftrightarrow U \subseteq W$ או $W \subseteq U$

הוכחה :

כיוון ראשון נניח $W \subseteq U$ או $U \subseteq W$

- אם $W \subseteq U$ אז $U \cup W = \mathrm{U}$ ו U תמ״ו של V.
- אם $U \subseteq W$ אז $U \cup W = \mathrm{W}$ ו W תמ״ו של V.

כיוון שני נניח $W \nsubseteq U$ ו $U \nsubseteq W$ נראה כי $U \cup W$ לא תמ״ו של V.

יהי $u_1 \notin W, u_1 \in U$ קיים u_1 כזה כי נניח $W \nsubseteq U$ ו $U \nsubseteq W$ $\leftarrow$ $u_1 \in \mathrm{U \cup W}$

יהי $w_1 \in W, w_1 \notin U$ קיים w_1 כזה כי נניח $W \nsubseteq U$ ו $U \nsubseteq W$ $\leftarrow$ $w_1 \in \mathrm{U \cup W}$

נראה שאין סגירות לחיבור, ז״א $w_1 + u_1 \notin \mathrm{U \cup W}$

כי אם $w_1 + u_1 \in \mathrm{U \cup W}$ אז בפרט $w_1 + u_1 = u \in \mathrm{U}$ או $w_1 + u_1 = w \in \mathrm{W}$

$w_1 = u - u_1 \in \mathrm{U}$

אבל $w_1 \notin \mathrm{U}$

$u_1 = w - w_1 \in \mathrm{W}$

אבל $u_1 \notin \mathrm{W}$

ולכן $\mathrm{U \cup W}$ אינו תמ״ו של V.

תרגיל

יהי $\mathrm{V} = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ויהיו

$$\mathrm{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a + b = 0 \right\}$$

מצאו $U \cap W$.

פתרון : נדרוש ששני התנאים התקיימו :

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a + b = 0, d = e = f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

סכום של תמ״ו

הגדרה

יהיו W, U תמ״ו של V נגדיר $U+W=\{u+w|w\in W\ ,u\in U\}$

טענה $U+W$ הוא תמ״ו של V.

הוכחה

- $0\in V$ וגם u $0\in U$ כי כל אחד מהם הוא תמ״ו ולכן $0+0=0\in U+W$.
- נניח $u_1+w_1, u_2+w_2\in U+W$ נראה סגירות לחיבור

$$(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=\underbrace{(u_1+u_2)}_{\in U}+\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W}\in U+W$$

- נניח $\alpha\in F, u+w\in U+W$ נראה סגירות לכפל בסקלר

$$\alpha(u+w)=\underbrace{\alpha u}_{\in U}+\underbrace{\alpha w}_{\in W}\in U+W$$

לכן $U+W$ הוא תמ״ו של V.

סכום ישר של תמ״ו

יהי V מ״ו ו $V \subseteq W, U$ תמ״ו. נאמר כי $U+W$ הוא סכום ישר של V אם מתקיים:

א. $U+W=V$

ב. $U\cap W=\{0\}$

נסמן את הסכום הישר $U\oplus W$.

דוג׳

$$U=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\},\qquad \mathrm{W}=\{(\mathrm{y},0):\mathrm{y}\in\mathbb{R}\}$$

$$U \cap \mathrm{W} = \left\{(a,b): a = b \text{ וגם } b = 0\right\} = \{(0,0)\}$$

$$U + \mathrm{W} = \{(x,x) + (y,0): x,y \in \mathbb{R}\} = \{(\mathrm{x}+\mathrm{y}, x)\} = \mathbb{R}^2$$

ולכן $V = U \oplus W$.

<u>טענה</u> אם $V = U \oplus W$ אז כל וקטור $v \in V$ ניתן לכתיבה בצורה $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in \mathrm{W}$ כתיבה זו יחידה.

דוג' מהתרגיל הקודם: $(6,-17) = \underbrace{(-17,-17)}_{\in \mathrm{U}} + \underbrace{(23,0)}_{\in \mathrm{W}}$