# צרופים ליניאריים (קומבינציה ליניארית)

**הגדרה: $V$ מ"ו $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ תת קבוצה של $V$. נבחר $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ סקלרים בשדה.**

**הביטוי $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ נקרא צירוף (קומבינציה) ליניארי(ת) של**

**$v_1, v_2, \cdots, v_n$.**

דוג'

1. כתבו את $(2,-5)$ כקו"ל של $(1,1),(0,1)$.

פתרון: נחפש סקלרים $\alpha, \beta$ כך ש:

$$(2,-5) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ -5 = \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = -5, \beta = 7 \rightarrow (2,-5) = -5(1,1) + 7(1,0)$$

2. כתבו את $v = 2t^2 + t - 1$ כקו"ל של $e_1 = t^2 - 2t + 5, e_2 = 2t^2 - 3t,\ e_3 = t + 3$

פתרון: נחפש סקלרים $\alpha, \beta, \gamma$ כך ש:

$$2t^2 + t - 1 = \alpha(t^2 - 2t + 5) + \beta(2t^2 - 3t) + \gamma(t + 3)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 1 = -2\alpha - 3\beta + \gamma \\ -1 = 5\alpha + 3\gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 3 \rightarrow v = -2e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

3. כתבו את $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ כקו"ל של $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

פתרון: נחפש סקלרים $\alpha, \beta, \gamma$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \beta \\ 1 = 2\beta \\ 1 = \beta + 2\gamma \end{cases} \rightarrow$$ אין פתרון

$A$ צ"ל של $A_1, A_2, A_3$.

4. כתבו את $(-4,3,-4)$ כק"ל של $(2,1,2), (1,3,1), (1,-7,1)$.

פתרון: נחפש סקלרים $\alpha, \beta$ כך ש:

$$(-4,3,-4) = \alpha(2,1,2) + \beta(1,3,1) + \gamma(1,-7,1)$$

$$\begin{cases} -4 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ 3 = \alpha + 3\beta - 7\gamma \\ -4 = 2\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \rightarrow \alpha = -3 - 2t, \qquad \beta = 2 + 3t, \qquad \gamma = t$$

## תת מרחב נפרש

**הגדרה: תהי S קבוצת וקטורים במ"ו $V$. $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$. תת המרחב הנפרש ע"י $S$ הוא אוסף כל הק"ל של הווקטורים ב $S$ והוא מסומן ע"י $span(S) = sp(S)$.**

**כלומר: $span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \ \alpha_i \in F\}$.**

**משפט $span(S)$ הוא תמ"ו של $V$ והוא תמ"ו הקטן ביותר המכיל את $S$. $S$ נקראת קבוצה פורשת של תת המרחב.**

תרגילים

1. א. האם $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \in sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון

נבדוק כל וקטור בנפרד: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \alpha = -1, \beta = 1$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 3, \beta = -1$$

$$\binom{4}{1} = \alpha\binom{1}{2} + \beta\binom{1}{3} \rightarrow \ \alpha = 11, \beta = -7$$

ולכן התשובה היא כן.

ב. האם $sp\left\{\binom{1}{2},\binom{1}{3}\right\} \subseteq sp\left\{\binom{0}{1},\binom{2}{3},\binom{4}{1}\right\}$

לשם נוחות נסמן: $W = sp\left\{\binom{0}{1},\binom{2}{3},\binom{4}{1}\right\}, U = sp\left\{\binom{1}{2},\binom{1}{3}\right\}$.

$U$ הוא תמ"ו (היות והוא $span$) ראינו בסעיף א' שהוא מכיל את $\binom{0}{1},\binom{2}{3},\binom{4}{1}$. ע"פ המשפט תת המרחב הקטן ביותר שהמכיל את $\binom{0}{1},\binom{2}{3},\binom{4}{1}$ הוא ה $span$ שלהם. ולכן $U$ שמכיל אותם בהכרח מכיל או שווה לתת המרחב הקטן ביותר שמכיל אותם.

ג. האם $sp\left\{\binom{1}{2},\binom{1}{3}\right\} = sp\left\{\binom{0}{1},\binom{2}{3},\binom{4}{1}\right\}$

נחזור לסימונים המקוצרים. בסעיף הקודם הוכחנו $W \subseteq U$ נראה עכשיו ש $U \subseteq W$ מהכלה כפולה נקבל שוויון.

$$\binom{1}{2} = \alpha\binom{0}{1} + \beta\binom{2}{3} + \gamma\binom{4}{1} \rightarrow \ \alpha = \frac{7}{4}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{4}$$

$$\binom{1}{3} = \alpha\binom{0}{1} + \beta\binom{2}{3} + \gamma\binom{4}{1} \rightarrow \ \alpha = \frac{11}{4}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{4}$$

לכן $\binom{1}{2},\binom{1}{3} \in W$, $W$ תמ"ו המכיל את $\binom{1}{2},\binom{1}{3}$ ולכן לפי המשפט $sp\left\{\binom{1}{2},\binom{1}{3}\right\} \subseteq W$.

.2

האם המרחב הנפרש ע"י $S_1 = \{(3,2,14,1),(1,1,6,0)\}$ שווה למרחב הנפרש ע"י

$$S_2 = \{(5,6,34,-1),(3,4,22,-1)(4,5,28,-1)\}$$

פתרון

דרך א: ניתן לפתור בדרך שפתרנו את התרגיל הקודם.

דרך ב: נבנה מטריצות ששורותיהן הן אברי $S_1, S_2$ נדרג את המטריצות לצורה קנונית. אם השורות השונות מאפס זהות בשתי המטריצות אזיי $\mathrm{sp}(S_1) = sp(S_2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 34 & -1 \\ 3 & 4 & 22 & -1 \\ 4 & 5 & 28 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 22 & -1 \\ 4 & 5 & 28 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרך ג: ניתן למצוא מטריצה אחת ולראות האם השורות של אחד מתמ״ו המרחבים מתאפסות, אם כן – הריי שהוא תלוי בתמ״ו השני. באותה דרך לנסות לאפס את שורות התמ״ו הראשון וע״פ הכלה הפוכה שני תמ״ו שווים זה לזה. (חשוב לשים לב בשיטה זו לא להחליף שורות בין שני תמ״ו).

.3

האם הפולינום את $p_1(x) = -x^4 + 7x^3 - x^2 + 4x + 11$ שייך למרחב הנפרש ע״י

$$p_2(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 4, p_3(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$$

פתרון: אם $p_1(x)$ שייך למרחב הנפרש ע״י $p_2(x), p_3(x)$ הרי שאם נשים במטריצה ונדרג מבלי לשנות את סדר השורות, השורה של $p_1(x)$ תתאפס (כלומר היא לא מסרה אינפורמציה חדשה שלא הייתה ידועה משתי השורות הקודמות).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & -1 & 4 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $p_1(x)$ שייך למרחב הנפרש ע״י $p_2(x), p_3(x)$.

<u>בהינתן איבר כללי של המרחב איך נמצא קבוצה פורשת של המרחב</u>

$$(\alpha + \beta - \gamma)t^2 + (2\alpha + \beta + \gamma)t + (\beta - \gamma)$$

נרשום את אותו ביטוי, אך הפעם לא לפי חזקות של הנעלם אלא לפי פרמטרים:

$$\alpha(t^2+2t)+\beta(t^2+t+1)+\gamma(-t^2+t-1)$$

שלושת האברים בסוגרים הם אברי הקבוצה הפורשת של המרחב הנתון.

<u>בהינתן קבוצה פורשת כיצד נעבור לאיבר כללי</u>

$$1+x, x-2x^2+x^3, 1+3x-4x^2+2x^3$$

נכפיל כל איבר בקבוצה הפורשת בסקלר וניצור איבר כללי, את האיבר כללי נרשום לפי סדר חזקות של הפולינום:

$$\alpha(1+x)+\beta(x-2x^2+x^3)+\gamma(1+3x-4x^2+2x^3)$$
$$=x^3(\beta+2\gamma)+x^2(-2\beta-4\gamma)+x(\alpha+\beta+3\gamma)+(\alpha+\gamma)$$

**מרחב שורה ועמודה**

**מרחב השורה של מטריצה $A_{m\times n}$ הוא המרחב הנפרש ע"י שורות $A$ והוא ת"מ של $\mathbb{C}^n$ או $\mathbb{R}^n$.**

**מרחב העמודה של מטריצה $A_{m\times n}$ הוא המרחב הנפרש ע"י עמודות $A$ והוא ת"מ של $\mathbb{C}^m$ או $\mathbb{R}^m$.**

מרחב השורה לא בהכרח שווה למרחב העמודה (ברור שאם המטריצה איננה ריבועית הם לא שווים גם במטריצה ריבועית .

דוג'

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ מרחב השורות הוא $(1,1)$ או $(\alpha,\alpha)$ ואילו מרחב העמודה הוא $(1,0)$ או $(\alpha,0)$.

אם $A$ מטריצה סימטרית או אנטי סימטרית מרחב השורה = מרחב העמודה (כי כל שורה ב - $A$ היא עמודה ב $A$ או כפל שלה בסקלר 1-).

תרגיל

נתונה מטריצה $A$ כך שמרחב שורה = מרחב עמודה. האם בהכרח אם $A$ מטריצה סימטרית או אנטי סימטרית?

לא, למשל $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ המט' לא סימטרית או אנטי סימטרית, אבל מרחב השורה והעמודה הוא: $\mathbb{R}^2$.

# תלות לינארית

**הגדרה: $V$ מ"ו מעל $\mathbf{F}$, $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. נאמר כי $v_1, v_2, \cdots, v_n$ תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ לא כולם 0 כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.**

**אם בהכרח כל הסקלרים הם 0 נאמר שהווקטורים הנ"ל בת"ל.**

**קבוצה המכילה וקטורים ת"ל נקראת קבוצה תלויה לינארית. קבוצה המכילה וקטורים בת"ל נקראת קבוצה בלתי תלויה לינארית.**

תרגילים

1. האם הווקטורים $(1,2,-3), (1,-3,2), (2,-1,5)$ תלויים לינארית?

פתרון:

דרך א $0 = \alpha(1,2,-3) + \beta(1,-3,2) + \gamma(2,-1,5)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 0 = 2\alpha - 3\beta - \gamma \\ 0 = -3\alpha + 2\beta + 5\delta \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

דרך ב נרשום את הווקטורים כשורות של מטריצה ונדרג, אם שורה מתאפסת הם ת"ל, אם לא הם בת"ל.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & -5 & 11\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

לכן הווקטורים בת"ל.

2. האם הווקטורים $(1,-2,1), (2,1,-1), (7,-4,1)$ תלויים לינארית?

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 10 & -6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן הווקטורים ת"ל.

3. האם $6t^2 + 3t + 7, 4t^2 + 2,\ 2t^2 + 3t + 5$ ת"ל?

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & 2\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & -6 & -8\\ 0 & -6 & -8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & -6 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן הפולינומים ת"ל.

4. נתון $u, v, w \in V$ בת"ל. האם הקבוצה $\{u + v + w, v - w, 2w\}$ ת"ל ב - $V$?

$$\alpha(u + v + w) + \beta(v - w) + \gamma(2w) = 0$$

$$\alpha u + (\alpha + \beta)v + (\alpha - \beta + 2\gamma)w = 0$$

נתון $u, v, w$ בת"ל ולכן מקדמיהם בהכרח שווים 0. ז"א

$$\begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \alpha + \beta \\ 0 = \alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \to \ \alpha = \ \beta = \gamma = 0$$

ולכן הקבוצה החדשה גם בת"ל.

5. א. האם הווקטורים $(1, i), (i, -1)$ ת"ל מעל $\mathbb{C}$?

נחפש 2 סקלרים ב $\mathbb{C}$ כך ש $\alpha(1,i)+\beta(i,-1)=0$

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta i\ /i\\ 0=\alpha i-\beta\end{cases} \rightarrow \text{יש אינסוף פתרונות} \rightarrow \alpha=1,\beta=i$$

קבלנו שלא כל הסקלרים שווים בהכרח 0 ולכן הווקטורים ת״ל מעל $\mathbb{C}$.

ב. האם הווקטורים $(1,i),(i,-1)$ ת״ל מעל $\mathbb{R}$?

נחפש 2 סקלרים ב $\mathbb{R}$ כך ש $\alpha(1,i)+\beta(i,-1)=0$

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta i\\ 0=\alpha i-\beta\end{cases} \rightarrow \alpha=-\beta i$$

הסקלרים ממשיים (מעל $\mathbb{R}$ ). קבלנו שאגף שמאל ממשי ואגף ימין מדומה. לכן רק $\alpha=\beta=0$ פותר את המערכת. ולכן הווקטורים בת״ל מעל $\mathbb{R}$.

6. הוכיחו כי קבוצה המכילה את וקטור האפס היא ת״ל.

הוכחה $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\subseteq V$ נניח שאחד הווקטורים הוא וקטור האפס $(v_2=0)$.

$$0\cdot v_1+7v_2+\cdots+0\cdot v_n=0$$

רשמנו את 0 כקומבינציה לינארית אבל לא כל הסקלרים היו 0 ולכן הקבוצה ת״ל.

7. הוכיחו כי 2 וקטורים $\mathrm{u},\mathrm{w}$ שונים מאפס ת״ל אמ״מ אחד מהם הוא כפולה בסקלר של האחר.

הוכחה

כיוון ראשון: נניח $u=\alpha\mathrm{w}$ אזי $u-\alpha\mathrm{w}=0$. רשמנו את 0 כק״ל שלא כל הסקלרים שווים 0 ולכן הווקטורים ת״ל.

כיוון שני: $\mathrm{u},\mathrm{w}$ ת״ל, ז״א שקיימים $\alpha,\beta$ (שניהם לא בו זמנית שווים 0) כך ש:

$$\alpha\mathrm{u}+\beta\mathrm{w}=0$$

$$\alpha\mathrm{u}=-\beta\mathrm{w}$$

נניח $\alpha \neq 0$, לכן מדובר לחלק בו:

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}w$$

כלומר u הוא כפולה בסקלר של $w$.

נכון / לא נכון

1. נתון $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ כך שכל 2 מהם בת"ל, האם כל השלושה בת"ל?

לא נכון, דוג' נגדית: $v_1 = (-1,1), v_2 = (-1,0), v_3 = (0,1)$

.2

אם u, v, w ת"ל אז המרחב הנפרש ע"י u, v שווה למרחב הנפרש ע"י u, w?

לא נכון, $w = (0,0,1), v = (3,3,3), u = (1,1,1)$

$$span(u, v) = span\{(1,1,1)\} \neq span(u, w) = span\{(1,1,1), (0,0,1)\}$$

3. אם $A$ ו - $A^t$ ת"ל אז $A$ סימטרית או אנטי סימטרית.

הוכחה: $A$ ו - $A^t$ ת"ל אזיי $A = \alpha A^t$ נפעיל על 2 הצדדים t

$$A^t = \alpha (A^t)^t = \alpha A$$

נציב חזרה במשוואה המקורית: $A = \alpha A^t = \alpha(\alpha A) = \alpha^2 A$

$$0 = (1 - \alpha^2)A$$

$\alpha = -1 \rightarrow A = -A^t$
A מטריצה אנטי סימטרית

$\alpha = 1 \rightarrow A = A^t$
A מטריצה סימטרית

$A = 0$
סימטרית ואנטי סימטרית

4. נתון $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$ ת"ל, אבל כל $n$ וקטורים מתוכם בת"ל. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ סקלרים כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ הוכיחו שכל ה - $\alpha$ – ות שונות מאפס.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת $\alpha_i = 0$ (אבל לא כל ה - $\alpha$ – ות שווות 0 – כי נתון שה $n + 1$ וקטורים ת"ל). נקבל:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_{i-1} v_{i-1} + 0 \cdot v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$$

קבלנו צרוף של $n$ וקטורים שלא כל המקדמים שווים אפס ולכן $n$ הווקטורים ת"ל – בסתירה לנתון, לכן לא יתכן ש $\alpha_i = 0$.