בסיס ומימד

הגדרה V מ"ו מעל F, $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ נקראת **בסיס** אם היא בת"ל ופורשת. **המימד** של V הוא מספר האברים בבסיס ומסומן ב $dimV$.

משפט: V מ"ו ו- $dimV=n$

- כל קבוצה בת"ל בת n אברהם היא בסיס.
- כל קבוצה פורשת בת n אברים היא בסיס.
- כל קבוצה המכילה יותר מ n אברים היא ת"ל.
- כל קבוצה המכילה פחות מ n אברים לא פורשת.
- אם W תמ"ו של V אז $dimW\le dimV$ אם $dimW=dimV$ אזיי $W=\mathrm{V}$
- משפט המימדים: $\dim(U+W)=dimU+dimW-\dim(U\cap W)$

תרגילים

1. מהו הבסיס והמימד של המרחב הנפרש ע"י $\{(7,0,-1),(1,2,1),(4,-6,-4)\}$?

פתרון: הקבוצה הנ"ל פורשת, נזרוק את התלויים כדי לקבל בסיס, לשם כך נכניס את הוקטורים למטריצה ונדרג.

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\4&-6&-4\\7&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-14&-8\\0&-14&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-14&-8\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קבלנו קבוצה עם 2 אברים בת"ל $(1,2,-3),(0,-14,-8)$ ולכן הם יכולים לשמש כבסיס.

מימד המרחב הוא 2.

<u>הערה</u>: ניתן לבחור (במקרה שלנו) כל 2 אברים בקבוצה שאינם תלויים זה בזה.

2. האיבר הכללי של מרחב W הוא $W=\{(\alpha+\beta-\gamma)t^2+(2\alpha+\beta+\gamma)t+(\beta-\gamma)\}$

W תת מרחב של $P_2[x]$ מצאו בסיס ומימד ל $-W$.

פתרון

לפני שנפתור נעיר שרק במרחב הפולינומים מתקיים שמרחב מסוים ואת מ״ו של מרחב מסדר גדול יותר (למשל $P_2[x]$ הוא תמ״ו של $P_5[x]$. במטריצות או וקטורים זה לא נכון, למשל: $\mathbb{R}^3$ הוא לא תמ״ו של $\mathbb{R}^4$).

נמצא קבוצה פורשת ע״י הוצאת סקלרים באיבר הכללי:

$$\alpha(t^2+2t)+\beta(t^2+t+1)+\gamma(-t^2+t-1)$$

קבלנו קבוצה פורשת $\{t^2+2t, t^2+t+1, -t^2+t-1\}$ נדרג כדי לקבוע האם הם בת״ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

קבלנו מט׳ מסדר 3×3 עם דרגה 3 ולכן הקנונית שלה היא מטריצת היחידה מסדר 3×3 לכן נוכל לבחור כבסיס ל W את הבסיס הסטנדרטי של $P_2[x]$: $\{1,t,t^2\}$. כמובן, שיכלנו להישאר עם שלושת הפולינומים המקוריים של W.

האם W הוא כל המרחב? תלוי מהו המרחב המכיל את W (כמו שהערנו בתחילת הפתרון). אם המרחב $P_2[x]$ הוא המרחב המכיל את W אזיי W שווה לכל המרחב ע״פ משפט המימדים (כי יש לשניהם אותו מימד).

הערה חשובה: בשונה מתרגיל 2 שבחרנו כבסיס את המספרים שנשארו במטריצה המדורגת, בתרגיל שלנו אסור לעשות זאת. כי אצלנו המרחב הוא מרחב של פולינומים ($P_n[x]$) ואילו שורות המטריצה שייכות ל $\mathbb{R}^3$. המספרים במטריצה הם רק מקדמי הפולינום ולכן אם רוצים להשתמש בשורות המטריצה המדורגת התשובה תהיה: $\{t^2+2t, -t+1, 2\}$.

3. במערכת הומוגנית – אוסף הפתרונות של המערכת הוא מ״ו והוא תמ״ו של $\mathbb{R}^n$ (כאשר n הוא מספר הנעלמים). מהו הבסיס והמימד של מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2x-3y+3z=0 \\ 3z-y=0 \end{cases}$$

פתרון

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

גם פה נשים לב שלא הגענו לפתרון (בקשו את מרחב הפתרונות) נשאר לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

במערכת הומוגנית מימד מרחב הפתרונות שווה למספר דרגות החופש במערכת:

$$n - r(A) = 3 - 2 = 1$$

נסמן $z = t$ ונקבל: $x = -3t, y = 3t$ מכאן הפתרון הכללי:

$(x, y, z) = (-3t, 3t, t) = t(-3,3,1)$ לכן הבסיס הוא $(-3,3,1)$.

4. מהו הבסיס והמימד של $\{(a, b, c, d)|a + c = 0, b + d = 0\}$

פתרון: יש לנו 2 דרגות חופש ולכן זהו המימד. נתיב $a = t, b = k$ ונקבל $c = -t, d = -k$

$$(a, b, c, d) = (t, k, -t, -k) = t(1,0,-1,0) + k(0,1,0,-1)$$

הבסיס הוא: $(1,0,-1,0),\ (0,1,0,-1)$

5. $V = P_3[x]$ נתון 2 תמ"ו של V:

$$\mathrm{W} = sp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3, 1 + 3x - 4x^2 + 2x^3\}$$

$$U = \{p(x) \in V|p(0) = p(1)\}$$

מצאו בסיס ומימד ל $W, U, U \cap W, U + W$. השלימו את W ל V (אם הוא לא שווה לו).

פתרון

נתחיל בW : נזרוק את הפולינומים התלויים ע״י דירוג במטריצה.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -4 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נחזור למרחב הפולינומים, הבסיס של W הוא : $\{x-2x^2+x^3, 1+x\}$ ומימדו 2.

נעבור ל U :

$$U=\{a+bx+cx^2+dx^3|a=a+b+c+d\}=\{p(x)\in V|b=-c-d\}$$

נציב באיבר הכללי של U ונוציא סקלרים :

$$a+bx+cx^2+dx^3=a+(-c-d)x+cx^2+dx^3=a+c(-x+x^2)+\mathrm{d}(-\mathrm{x}+x^3)$$

ניתן לראות שקבלנו בסוגריים שלושה פולינומים בת״ל (הוכחה מלאה תהיה ע״י דרוג במטריצה)

מכאן שבסיס ל U הוא : $\{1,-x+x^2,-\mathrm{x}+x^3\}$ ומימדו 3.

הערה : יכלנו למצוא את הבסיס והמימד של U הצורה הבאה. נוכל להסתכל על האיבר הכללי של U כעל משוואה ב 4 נעלמים (a,b,c,d) עם משוואה אחת $(a=a+b+c+d)$ ולכן יש 3 דרגות חופש (זה המימד) ופתרון המערכת ייתן את הבסיס :

$$(a,b,c,d)=(a,-c-d,c,d)=a(1{,}0{,}0{,}0)+c(0,-1{,}1{,}0)+d(0,-1{,}0{,}1)$$

$U\cap W$:

<u>דרך א</u> : השוואת אברים כללים (לאחר שמצאנו את הבסיס של כל תמ״ו, נבנה איבר כללי ונשווה בין שני תמ״ו)

$$\beta(x-2x^2+x^3)+\alpha(1+x)=a+b(-x+x^2)+\mathrm{c}(-x+x^3)$$

נשווה בין מקדמי החזקות של x בשני האגפים :

חזקות של x	אגף שמאל אגף ימין	
x^0	$\alpha = a$	
x^1	$\beta + \alpha = -b - c$	$\alpha + \beta = 2\beta - \beta \rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 0}$
x^2	$-2\beta = b$	$\uparrow$
x^3	$\beta = c$	$c = \beta$ $b = -2\beta$

נציב באיבר הכללי (של W) ונקבל: $\beta(x - 2x^2 + x^3)$ ז"א הבסיס הוא$\{x - 2x^2 + x^3\}$ ומימדו שווה 1.

הערה: נשים לב שהיו להם שתי מערכות של פרמטרים $\{\alpha, \beta\}$ ו $\{a, b, c\}$ כי השוונו בין 2 תמ"ו. בנינו מערכת משוואות ומצאנו תנאי על מערכת אחת של פרמטרים, אין צורך למצוא תנאי על המערכת השנייה (אנחנו מחפשים חיתוך ז"א ששני הצדדים צריכים להיות שווים).

<u>דרך ב</u>: (קלה יותר אבל לא תמיד אפשרית)

נבחר איבר כללי של תמ"ו ונפעיל עליו את התנאי של התמ"ו השני.

נבחר את האיבר כללי של W :

$$\beta(x - 2x^2 + x^3) + \alpha(1 + x) = \alpha + x(\alpha + \beta) - 2\beta x^2 + \beta x^3$$

נפעיל את התנאי שלU : $p(0) = p(1)$ ונקבל:

$$\alpha = \alpha + (\alpha + \beta) - 2\beta + \beta \ \rightarrow \alpha = 0$$

נחזור לאיבר הכללי (של W) ונציב $\alpha = 0$: $\beta(x - 2x^2 + x^3)$ ז"א הבסיס הוא $\{x - 2x^2 + x^3\}$ ומימדו 1.

$U+W$:

לפי משפט המימדים:

$$\dim(U+W)=dimU+dimW-\dim(U\cap W)=3+2-1=4$$

ז"א $\dim(U+W)=dimV$ לכן נוכל לבחור את הבסיס הסטנדרטי של $P_3[x]$: $\{1,x,x^2,x^3\}$.

באופן כללי נשתמש במשפט הבא:

משפט: איחוד הבסיסים של W ו U הוא קבוצה פורשת ל $U+W$. למציאת בסיס לסכום נדרג את המטריצה המורכבת מהבסיסים של W ו U. מס' השורות המתאפסות = מימד החיתוך.

[השורות שהתאפסו הן לא בסיס לחיתוך].

במקרה שלנו:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \mathrm{W} \\ \\ \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \mathrm{U} \\ \\ \end{array}\right\{ \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

האם $\mathrm{W}\oplus\mathrm{U}=\mathrm{V}$ (סכום ישר) לשם כך צריך להתקיים: 1) $\mathrm{V}=\mathrm{U}+\mathrm{W}$ 2) $\mathrm{U}\cap\mathrm{W}=0$

אצלנו הדרישה הראשונה מתקיימת אבל החיתוך הוא ממימד אחד ולכן לא רק האיבר האפס מוכל בו. ולכן הסכום לא ישר.

V לא שווה ל W כי המימדים שלהם שונים. נשלים את W ל – V ע"י הוספת 2 וקטורים בת"ל, למשל:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \mathrm{W} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \mathrm{Z}\text{ - (השלמה)} \end{array}$$

השלמה זו היא סכום ישר $\mathrm{W}\oplus\mathrm{Z}=\mathrm{V}$ כי $\mathrm{W}\cap\mathrm{Z}=0$.

נוכל לבחור וקטורים אחרים ל - Z ולכן יש ∞ השלמות כך שהסכום הישר יהיה שווה ל V.

sgershon@technion.ac.il

6. $W=\{0\}$ מהו הבסיס והמימד של W?

הקבוצה הנ"ל תלויה כי עבור $0 \neq \alpha \in F$ מתקיים $\alpha \cdot 0 = 0$ (ז"א כתבנו את 0 כקו"ל כך שלא כל הסקלרים שווים 0). ולכן צריך לזרוק את האבירם התלויים מ $W-$. נשאר לנו קבוצה ריקה. ולכן הבסיס של W הוא קבוצה ריקה ומימדו הוא 0.

7. מהו מימד המט' האנטי סימטריות מסדר 3×3 ?

נמצא איבר כללי למרחב הנ"ל. $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\}$ יש 3 סקלרים ולכן נקבל 3 אברים

במרחב המט' האנטי סימטריות מסדר 3×3 והבסיס (המתקבל לאחר הוצאת הסקלרים:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$