וקטור קורדינאטות

הגדרה V מ"ו מעל F, $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ בסיס של V ו - $v\in V$ אזי קיימים סקלרים יחידים $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in F$ כך ש $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n$. **וקטור הקורדינאטות** (ו"ק) של v לפי הבסיס B מסומן ב $[v]_B$.

תרגילים

1.א. מהו וקטור הקורדינאטות של $(2,5,-7)$ לפי הבסיס הסטנדרטי E?

פתרון : הבסיס הסטנדרטי הוא $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ולכן: $[(2,5,-7)]_E=(2,5,-7)$.

ב. מהו וקטור הקורדינאטות של $(2,5-,7)$ לפי הבסיס $\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,0)\}$=B?

$$(2,5,-7)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,-1,0)+\gamma(1,0,0)\ \rightarrow \begin{cases}2=\alpha+\beta+\gamma\\ 5=\alpha-\beta\\ -7=\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\alpha=-7\\ \beta=-12\\ \gamma=21\end{matrix}$$

ולכן וקטור הקורדינאטות לפי הבסיס החדש : $[(2,5,-7)]_B=(-7,-12,21)$.

ג. נתון $[v]_B=(2,5,-7)$ מהו v?

$$v=2(1,1,1)+5(1,-1,0)-7(1,0,0)=(0,-3,2)$$

2. $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\end{pmatrix}$

א. מהו וקטור הקורדינאטות של A לפי הבסיס הסטנדרטי E?

$[A]_B=(1,3,0,-4)$ (משטיחים את המטריצה לווקטור).

ב. מהו וקטור הקורדינאטות של A לפי הבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$=K?

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta \\ 3 = \beta+\gamma+\delta \\ 0 = \gamma+\delta \\ -4 = \delta \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 4 \\ \delta = -4 \end{matrix}$$

ולכן וקטור הקורדינאטות לפי הבסיס החדש: $[(2,5,-7)]_K = (-2,3,4,-4)$

ג. נתון $[A]_K = (1,3,0,-4)$ מהי A?

$$A = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -4 & -4\end{pmatrix}$$

משפט V מ״ו, B בסיס, הקבוצה $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ת״ל אמ״מ ו״ק שלהם לפי B ת״ל.

תרגילים

1.

האם הפולינומים הבאים ת״ל: $t+1, t^2-2, t^2-3t+1$?

נבדוק תלות בין ו״ק לפי הבסיס הסטנדרטי (כדאי לבחור בבסיס זה כי ו״ק הם המקדמים עצמם):

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

לא התאפסה שורה ולכן הוקטורים בת״ל.

2.

V מ״ו, B_1, B_2 בסיסים שונים של V. יהי $0 \neq v \in V$ האם בהכרח $[v]_{B_1} \neq [v]_{B_2}$?

לא, דוג׳

$$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$$

$$[(1,1,0)]_{B_1} = (1,1,0), \qquad [(1,1,0)]_{B_2} = (1,1,0)$$

הערה : אם היה נתון שלכל $v \in V$ ו״ק שווים אזי הבסיסים שווים.

3. מצאו את ו״ק של המטריצות הסימטריות מסדר 2×2 :

א. ע״פ הבסיס הסטנדרטי של מטריצות 2×2.

איבר כללי של מטריצה סימטרית מסדר 2×2 הוא : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

הבסיס הסטנדרטי הוא : $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ולכן : $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right]_E = (a,b,b,c) \in \mathbb{R}^4$

ב. ע״פ הבסיס הסטנדרטי של מטריצות סימטריות מסדר 2×2.

איבר כללי של מטריצה סימטרית מסדר 2×2 הוא : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ נמצא בסיס ע״י הוצאת סקלרים ונקבל :

הבסיס הסטנדרטי הוא : $E_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ולכן : $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right]_{E_1} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

הערה : מתרגיל זה אפשר להסיק שו״ק לפי בסיסים שונים עשויים להיות שונים לא רק במספרים שהם מכילים אלא יכול להיות שהם שונים גם באורכם.

מטריצות הפיכות

הגדרה: תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ מעל F. נאמר כי A **מט׳ הפיכה** אם קיימת $B_{n\times n}$ כך ש

$AB = BA = I$ ונסמן $B = A^{-1}$.

מציאת מט׳ הפיכה:

נרשום מצד שמאל את המט׳ A, מצד ימין את מט׳ היחידה (מאותו סדר של A). נדרג את מטריצה A עד שנגיע לקנונית, את אותן פעולות שנבצע על מטריצה A נפעיל גם על מט׳ היחידה. בסוף התהליך משמאל תופיע מט׳ היחידה ומימין תופיע המט׳ ההפיכה ל A.

דוג׳:

מצאו מטריצה הפיכה למטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

לסיכום: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>משפט</u> התנאים הבאים שקולים:

- $A_{n\times n}$ מטריצה הפיכה.
- A שקולת שורות ל I.
- $r(A) = n$

- למערכת $Ax = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי.
- למערכת $Ax = b$ יש פתרון לכל b.
- מרחב השורות של A שווה למרחב העמודות של A = F^n.
- השורות והעמודות של A הן בת״ל.

תכונות:

- A הפיכה $\leftrightarrow$ A^{-1} הפיכה.
- AB הפיכה $\leftrightarrow$ A, B הפיכות (כל אחת בפני עצמה)
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

הוכחה: נראה שאם נכפיל את AB ב $B^{-1}A^{-1}$ מצד ימין נקבל I:

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

באותה דרך נכפיל מצד שמאל.

- $((A)^t)^{-1} = ((A)^{-1})^t$

הוכחה: A הפיכה ולכן $I = (A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot A^t$

קבלנו ש A הפיכה ולכן קיימת $(A^t)^{-1}$ נכפיל מצד ימין את השורה הקודמת ב $(A^t)^{-1}$:

$$I \cdot (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

- $((A)^n)^{-1} = ((A)^{-1})^n$

הוכח / הפרך

1. $\mathrm{A + B}$ הפיכה $\leftarrow$ A, B הפיכות (כל אחת בפני עצמה)

לא נכון: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A^2 = 0$ $\leftarrow$ $(A + I), (A - I)$ הפיכות

נראה שמכפלתן הפיכה ולכן ע״פ התכונה השנייה הן הפיכות.

$$(A+I)\cdot(A-I)=A^2-\ I^2=0-\ I^2=-I$$

3. AB הפיכה ← BA הפיכה

הטענה נכונה כי אם AB הפיכה ז״א 2 המטריצות הפיכות (כל אחת בפני עצמה), מכפלת מטריצות הפיכות היא הפיכה ולכן גם BA הפיכה.

4. A הפיכה, $AB=0$ ← $B=0$

הטענה נכונה:

נצא מהנתון $AB=0$

היות ונתון כי A הפיכה , לכן קיימת A^{-1} נכפיל את המשוואה משמאל ב A^{-1}.

$$AB=0 \quad /A^{-1}$$

$$A^{-1}\cdot AB=A^{-1}\cdot 0$$

$$\mathrm{B}=0$$

5. $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$ ו A הפיכה ← B הפיכה

הטענה לא נכונה, דוג׳ נגדית: $\mathrm{A}=I, B=0$.

6. A הפיכה ← למערכת $\mathrm{A}^6x=0$ יש רק פתרון טריוויאלי.

הטענה נכונה. A הפיכה ← A^6 הפיכה ← למערכת $\mathrm{A}^6x=0$ יש רק פתרון טריוויאלי..

7.

א. v_1,v_2,v_3 בת״ל ← Av_1,Av_2,Av_3 בת״ל.

הטענה לא נכונה, דוג׳ נגדית $A=0$.

ב. v_1,v_2,v_3 בת״ל, $A\neq 0$ ← Av_1,Av_2,Av_3 בת״ל.

עדיין הטענה לא נכונה, דוג׳ נגדית $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

נקבל $Av_1 = 0, Av_2, Av_3$ קבוצה המכילה את וקטור האפס היא קבוצה ת״ל.

ג. v_1, v_2, v_3 בת״ל, A הפיכה ← Av_1, Av_2, Av_3 בת״ל.

הטענה נכונה: נבדוק תלות לפי הגדרה

$$\alpha(Av_1) + \beta(Av_2) + \gamma(Av_3) = 0$$

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = 0 \ \ /A^{-1}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

נתון כי v_1, v_2, v_3 בת״ל לכן $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ז״א Av_1, Av_2, Av_3 בת״ל.

8. $A_{n\times n} + B_{n\times n}$ לא הפיכה ← $\mathrm{r(A) + r(B) < 2n}$

הטענה לא נכונה דוג׳ נגדית: $A = I, B = -I$

9.

AB לא הפיכה ← $\mathrm{r(A) + r(B) < 2n}$

הטענה נכונה: AB לא הפיכה← A לא הפיכה או B לא הפיכה (או שתיהן לא הפיכות)

ולכן $\mathrm{r(B) < n}$ או $\mathrm{r(A) < n}$

ולכן $\mathrm{r(A) + r(B) < 2n}$.

10.

$AB = 0$ מטריצה מסדר $n \times n$ ← $n \ \leq \ r(B) + r(A)$.

הטענה נכונה:

נרשום את הנתון $AB = 0$ בצורה הבאה:

$$A(\ b_1 b_2 \cdots b_n) = 0$$

ז"א עמודות B הם פתרונות של המערכת $Ax = 0$.

יכול להיות שקיימים למערכת יותר פתרונות מאשר עמודות B (לא יכול להיות שקיימים פחות)

ולכן :

$$\begin{matrix}\text{מרחב הפתרונות} \\ \text{של } \mathrm{Ax} = 0\end{matrix} \subseteq \begin{matrix}\text{מרחב העמודות} \\ \text{של B}\end{matrix}$$

$$dim\begin{pmatrix}\text{מרחב הפתרונות} \\ \text{של } \mathrm{Ax} = 0\end{pmatrix} \leq dim\begin{pmatrix}\text{מרחב העמודות} \\ \text{של B}\end{pmatrix}$$

$$r(B) \quad \leq \quad n - r(A)$$

$$r(B) + r(A) \quad \leq \quad n$$

$$|A| = 1$$

.11

האם $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

לא, דוג' נגדית : $A = \mathrm{I}, \mathrm{B} = -\mathrm{I}$. $A + B$ לא הפיכה אבל A, B הפיכות.

דוג' נוספות : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \mathrm{I}, \mathrm{B} = \mathrm{I}$

אגף ימין $A + B = 2I \quad \leftarrow \quad (A+B)^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{I}$

אגף שמאל $A^{-1} = B^{-1} = \mathrm{I} \quad \leftarrow \quad A^{-1} + B^{-1} = 2\mathrm{I}$

.12

אם $A_{m\times n}, B_{n\times m}$ כך ש $m > n$ אז AB לא הפיכה.

הטענה נכונה:

$$r(AB)_{m\times m} \le \min\,(r(A), r(B) \le n < m$$

.13

תהי A מטריצה לא ריבועית: הוכח / הפרך לפחות אחת מהמטריצות $A\cdot A^t, A^t\cdot \mathrm{A}$ לא הפיכה.

הטענה נכונה: נסמן $A_{m\times n}$ בה"כ $n < m$:

$$r(A\cdot A^t)_{m\times m} \le \min\,(r(A), r(A^t) \le n < m$$

.14

ידוע כי קיים λ כך ש $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix}^{2500}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix} = 0$ מהו a^2?

למערכת $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix}x = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי לכן $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix}^{2500}$ לא הפיכה. לכן $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix}$ לא הפיכה, נדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1-2a^2\end{pmatrix}$$

היות והמטריצה לא הפיכה, השורה השנייה היא אפסים, ז"א $1-2a^2 = 0$ ולכן $a^2 = \frac{1}{2}$.

.15

נתון A מאפסת את הפולינום $p(x) = x^2 - 7x + 6$, האם A הפיכה? אם לא נמק לא, אם כן מצאו את A^{-1}.

פתרון

נתון $$p(A) = A^2 - 7A + 6I = 0$$

$$A^2 - 7A = -6\mathrm{I}$$

$$A(A - 7I) = -6I$$

$$A\left(\frac{A-7I}{-6}\right)=I$$

ז"א A הפיכה ו $A^{-1}=\frac{A-7I}{-6}$.

מסקנה : אם מטריצה מאפסת פולינום עם מקדם חופשי שונה מאפס, אז המטריצה הפיכה וההופכית שלה היא פולינום ב - A במעלה קטנה ב 1 מהפולינום הנתון.

הערה : מטריצה יכולה לאפס פולינום ללא מקדם חופשי (מקדם חופשי = 0), למשל :

$A(A^2-9A-7I)=0$.

ראינו שכדי למצוא מטריצה הופכית צריך לעבוד "קשה". עבור מטריצה מסדר 2×2 יש נוסחה מיידית :

תהי $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אזיי $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.