דטרמיננטה

נגדיר דטרמיננטה למטריצות ריבועיות.

עבור $n=1$: $\mathrm{A}=(a_{11})$ נגדיר $\det(\mathrm{A})=|\mathrm{A}|=a_{11}$

עבור $n=2$: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\det(\mathrm{A})=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

עבור $n=3$: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\det(\mathrm{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

באופן כללי: $|A_{n\times n}|=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$

כאשר M_{1ij} (**המינור** ה-i,j) – הדטרמיננטה המתקבל ע״י מחיקת השורה ה – i-ית והעמודה ה – j-ית במטריצה.

ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי כל עמודה או שורה.

דוג':

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=(45-48)-2(36-42)+3(32-35)=0$$

נפתח לפי עמודה ראשונה

כדאי לחפש עמודה / שורה שיש בה הרבה אפסים כדי שהחישובים יהיו פשוטים.

$sgershon@technion.ac.il$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&4&5&5\\0&0&6&4\\0&0&0&7\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4&5&5\\0&6&4\\0&0&7\end{vmatrix}=1\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}6&4\\0&7\end{vmatrix}=1\cdot 4\cdot(6\cdot 7-0\cdot 4)=1\cdot 4\cdot 6\cdot 7$$

מסקנה חשובה : במטריצה משולשת (עליונה או תחתונה) הדטרמיננטה שווה למכפלת אברי האלכסון.

פעולות אלמנטריות על מטריצות

- החלפת שורות (או עמודות) במטריצה שקולה להכפלת הדטר׳ במינוס 1.
- מותר להוציא הוצאת סקלר משורה או עמודה **אחת**.
- הוספה כפולה של שורה (או של עמודה) לשורה (או עמודה) אחרת, לא משנה את ערך הדטר׳.

$$\begin{vmatrix}1&3&2&1\\-1&2&1&1\\0&3&4&5\\2&3&2&1\end{vmatrix}\underset{R_4\to R_4-2R_1}{\overset{R_2\to R_2+R_1}{=}}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&3&4&5\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}\overset{\text{הוצאת מינוס מ } R_4}{=}-\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&3&4&5\\0&3&2&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4\to 5R_4-3R_2}{\overset{R_3\to 5R_3-3R_2}{=}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&11&19\\0&0&1&-1\end{vmatrix}\overset{R_3\leftrightarrow R_4}{=}\frac{1}{25}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&1&-1\\0&0&11&19\end{vmatrix}=$$

הכפלנו שורה בסקלר לכן הוצאנו החוצה את ההופכי שלו

הוספת מינוס

משולשת עליונה

$$\overset{R_4\to R_4-11R_3}{=}\frac{1}{25}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&30\end{vmatrix}=\frac{1}{25}\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot 30=6$$

הערה : למרות שחלקנו קבלנו תוצאה שלמה, כי הפעולות בדטר׳ הן כפל, חיבור וחיסור. המספרים במטר׳ המקורית היו שלמים ולכן התוצאה חייבת להיות מספר שלם.

חוקי דטר׳

- $|A|=|A^t|$ ז״א כל המשפטים בקשר ל det נכונים גם לעמודות
- ניתן לפתח לפי כל שורה או עמודה.

- אם אחת השורות (העמודות) כולה אפסים אזיי $detA = 0$ ← מטריצה לא הפיכה
$|A| = 0$.
- מכפלת של det בסקלר, לא מאפשרת הכפלה של כל אברי המטריצה בסקלר.

$$\alpha|A| \neq |\alpha A|, \quad |\alpha A_{n\times n}| = \alpha^n|A|$$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

הוכחה: $A \cdot A^{-1} = I$

נפעיל דטר' על 2 האגפים: $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

תרגילים

.1

פתרו את המשוואה הבאה:

$$0 = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

כדי לא לקבל ממשואה ממעלה שלישית נעשה פעולות על הדטר' הפעם גם לפי עמודות.

$$0 = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} t+2 & -1 & 1 \\ t+2 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix} =$$

$$(t+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} (t+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

$$= (t+2)(t-2)(t+4-0) \rightarrow t = \pm 2, -4$$

פיתוח לפי שורה שניה

.2

הוכיחו :

$$\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma+m \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

פתרון נפתח לפי השורה השניה :

$$\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma+m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -(\alpha+k)\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + (\beta+l)\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - (\gamma+m)\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - \gamma\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha M_{21} + \beta M_{22} - \gamma M_{23}) + (-kM_{21} + lM_{22} - mM_{23})$$

$$= \begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

.3

נתון $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$ חשבו $\begin{vmatrix} 2a_1 & -c_1 & b_1 \\ 2a_2 & -c_2 & b_2 \\ 2a_3 & -c_3 & b_3 \end{vmatrix}$

עמודה ראשונה

עמודה שנייה

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & -c_1 & b_1 \\ 2a_2 & -c_2 & b_2 \\ 2a_3 & -c_3 & b_3 \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$|\mathrm{A}| = |A^t|$

sgershon@technion.ac.il

החלפת שורות

$$-(-2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 \quad = 10$$

.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_2\to R_2+R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_2\to R_2-R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 12\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 4 = -48$$

.3

נתונה מטריצה A ממשית מסדר 6×6 ידוע ש A הפיכה ומתקיים $A^4+2A=0$ חשבו את $|A|$.

פתרון

נצא מהנתון $A^4+2A=0$ ונעביר אגפים כדי שנוכל להפעיל דטר׳ על שני האגפים.

$$A^4 = -2A \quad /|\ |$$

$$|A^4| = |-2A|$$

$$|A|^4 = (-2)^6|A| \;/\; |A|\neq 0$$

$$|A|^3 = (-2)^6 = 64$$

$$|A| = 4$$

$sgershon@technion.ac.il$

.4

נתונות 2 מטריצות A, B ממשיות מסדר $n \times n$ ונתון כי n אי זוגי ו $AB^tA = -B$. הוכיחו כי B איננה הפיכה.

פתרון

$$AB^tA = -B \quad /|\,|$$

$$|AB^tA| = |-B|$$

$$|A| \cdot |B^t| \cdot |A| = |-B|$$

$$|A| \cdot |B| \cdot |A| = -|B|$$

$$|A|^2 \cdot |B| + |B| = 0$$

$$|B|(|A|^2 + 1) = 0 \quad \rightarrow |\mathrm{B}| = 0$$

.5

נתונה A מטריצה ממשית אנטי סימטרית מסדר אי זוגי, צ״ל $|\mathrm{A}| = 0$.

פתרון

$$A^t = -\mathrm{A} \quad /|\,|$$

$$|A^t| = |-\mathrm{A}|$$

$$|\mathrm{A}| = -|\mathrm{A}| \quad \rightarrow \quad 2|A| = 0 \quad \rightarrow |A| = 0$$

הערה : עבור מטריצה מסדר זוגי נקבל $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}|$ כך שלא נוכל לומר האם המטריצה הפיכה.

.6

כאשר סכום אברי השורות (העמודות) שווים, נשתמש בטריק הבא :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_1 \rightarrow C_1 + \cdots + C_5}{=} \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 13 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 13 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$13\begin{vmatrix}1&2&2&2&2\\0&3&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{vmatrix}=13\cdot 3^4$$

הכללה:

$$\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha&\cdots&\alpha\\\alpha&\alpha+\beta&\cdots&\alpha\\\alpha&\cdots&\alpha+\beta&\alpha\\\alpha&\alpha&\cdots&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(n\alpha+\beta)\beta^{n-1}$$

.7

לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד?

$$\begin{cases}kx+y+z=1\\x+ky+z=3\\x+y+kz=5\end{cases}$$

פתרון

נבנה det של מקדמים, נדרוש שהמטריצה תהיה הפיכה, ז"א $det\neq 0$

סכום אברי השורות שווה
נשתמש בתרגיל הקודם

$$0\neq\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2\ \rightarrow\ k\neq -2,1$$

.8

$R_2\rightarrow R_2-R_1$

נתון $\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=4$ חשבו $\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}$

הוצאת סקלר

$$4=\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}=-2$$

$R_1\leftrightarrow R_3$

$|A|=|A^t|$

$sgershon@technion.ac.il$

.9

לאילו ערכי n המטריצה הבאה הפיכה?

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}1100\cdots0\\0110\cdots0\\0011\cdots0\\ \vdots\\100\cdots01\end{pmatrix}$$

פיתוח לפי
עמודה ראשונה

פתרון: נחשב את $detA$ ונראה לאילו ערכי n היא שונה מאפס.

$$|A|=\begin{vmatrix}1100\cdots0\\0110\cdots0\\0011\cdots0\\ \vdots\\100\cdots01\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\begin{vmatrix}110\cdots0\\011\cdots0\\ \vdots\\000\cdots1\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\cdot1\begin{vmatrix}100\cdots0\\110\cdots0\\ \vdots\\00\cdots11\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{זוגי } n\\ 2 & \text{אי זוגי } n\end{cases}$$

מסקנה A הפיכה לכל n אי זוגי.

.10

$r(A)=4, A_{4\times4}$ ומתקיים $|A^2|=|-A|$ האם $|A|=-1$?

לא, דרך א:

$$|A^2|=|-A|$$

$$|A|^2=(-1)^4|A|=|A|$$

$$0=|A|^2-|A|=|A|(|A|-1)$$

$|A|=1$

$r(A)=4\rightarrow|A|\neq0$

דרך ב:

$r(A)=4$ לכן A הפיכה ולכן$|A|\neq 0$.

$$|A^2|=|-A|=|\mathrm{A}| \;\; /|A|\neq 0$$

תרגיל:

הוכיחו כי $A=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ הפיכה ומצאו את A^{-1}.

פתרון $|A|=cos^2\alpha+sin^2\alpha=1$ ולכן המטריצה הפיכה.

נשתמש בנוסחה "המהירה":

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

כלל קרמר

למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון יחיד אמ"מ $|A|\neq 0$.

הפתרון הוא: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\cdots x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$ כאשר $\Delta=|\mathrm{A}|$ ו Δ_i היא הדטרמיננטה של המטריצה

המתקבלת מ - A כאשר מחליפים את העמודה ה $-i-$ ית שלה בוקטור b.

דוג'

פתרו את המערכת: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}x=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow |A| = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 \rightarrow x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{array}\right\} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מטריצת ואן דר – מונדה

אם נבחר n מספרים $x_1, x_2, \cdots, x_n$ אזיי מטריצת ואן דר מונדה היא המטריצה הבאה:

$$A = \begin{vmatrix} {x_1}^0 & {x_1}^1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ {x_2}^0 & {x_2}^1 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_n}^0 & {x_n}^1 & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה שלה היא:

$$|A| = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

דוג': $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ חשבו $|A|$.

פתרון: זאת מטריצת ואן דר מונדה כאשר $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$.

$$|A| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = (2-1)(4-1)(4-2) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

adj (צמוד קלאסי)

A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. המינור i,j של A מסומן ע"י M_{ij}. כל איבר

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

דוג' :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ מצאו $adj(A)$.

פתרון

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. . $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מצאו $adj(A)$.

פתרון

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 12 & 4 & -6 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

משפט $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| \cdot I$ ז״א המטריצות מתחלפות בכפל והתוצאה היא מטריצה סקלרית.

מסקנה אם A הפיכה אז $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)}$.

תרגילים

1. תהי A הפיכה, בטאו את $|adj(A)|$ באמצעות $|A|$ כאשר A מסדר $n \times n$.

פתרון

נצא מהמשפט: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

נפעיל דטר׳: $|A| \cdot |adj(A)| = \big||A| \cdot I\big| = |A|^n \cdot |I|$

$$|A| \cdot |adj(A)| = |A|^n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{|adj(A)| = |A|^{n-1}}$$

הערה: אם A לא הפיכה עדיין מתקיים $|adj(A)| = |A|^{n-1} = 0$

הוכחה:

- אם $A \neq 0$ לא הפיכה, נניח בשלילה ש $adj(A)$ הפיכה.

  לפי המשפט: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I = 0 \quad /[adj(A)]^{-1}$

  $A = 0$ בסתירה לנתון.

- אם $A = 0$ אז $adj(A) = 0$.

2.

A הפיכה א) הוכיחו $adj(A^{-1}) = [adj(A)]^{-1}$

ב) חשבו $|adj\ adj(A)|$

ג) חשבו $adj\ adj(A)$

פתרון

א) היות ו A הפיכה קיימת A^{-1} ולכן לפי המשפט (נציב במקום A את A^{-1})

$$A^{-1}\cdot adj(A^{-1})=|A^{-1}|\cdot I \ \ /A$$

$$\boldsymbol{adj(A^{-1})}=|A^{-1}|\cdot \mathrm{A}=|A|^{-1}\cdot \mathrm{A}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{|A|}}\cdot \boldsymbol{A}$$

מצד שני: נצא מהמשפט: $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$

נפעיל על 2 אגפי המשפט מטריצה הפיכה

$$(A\cdot adj(A))^{-1}=(|A|\cdot I)^{-1}$$

$$[adj(\mathrm{A})]^{-1}\cdot A^{-1}=|A|^{-1}\cdot I^{-1} \ \ /A$$

$$[\boldsymbol{adj}(\mathbf{A})]^{-\mathbf{1}}=|A|^{-1}\cdot \mathrm{A}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{|A|}}\cdot \boldsymbol{A}$$

ב)

ראינו $|adj(A)|=|A|^{n-1}$

נציב $A=adj(A)$

$$|adjadj(A)|=|adjA|^{n-1}=(|A|^{n-1})^{n-1}=|A|^{(n-1)^2}$$

ג.

נציב במשפט $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$ את המטריצה $adj(A)$ ונקבל:

$$adjA\cdot adj(adjA)=|adjA|\cdot I$$

ראינו $adj(A)=|A|\cdot A^{-1}$. נציב ונקבל:

$$|A|\cdot A^{-1}\cdot adj(adjA)=|adjA|\cdot I$$

בנוסף: $|adj(A)|=|A|^{n-1}$

$$|A|\cdot A^{-1}\cdot adj(adjA)=|A|^{n-1}\cdot I \quad /|A|$$

$sgershon@technion.ac.il$

$$A^{-1}\cdot adj(adjA)=|A|^{n-2}\cdot I \quad /A$$

$$adj(adjA)=|A|^{n-2}\cdot A$$

מטריצות אלמנטריות

הגדרה : מט' אלמנטריות היא מטריצה שהתקבלה ממט' היחידה ע"י ביצוע פעולה אלמנטרית אחת.

משפט : ביצוע פעולה אלמנטרית אחת על שורה של מט' שקולה לכפל במט' אלמנטרית מתאימה מצד שמאל.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}}_{A}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to -R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\qquad E_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\qquad E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

אם A הפיכה ניתן להכפיל : $I=E_k\cdot E_{k-1}\cdot\dots E_1\cdot A$

מתחילים מהפעולה האחרונה

מצד ימין ב A^{-1} ולקבל:

$$I\cdot A^{-1}=E_k\cdot E_{k-1}\cdot\dots E_1\cdot A\cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}=E_k\cdot E_{k-1}\cdot\dots E_1$$

ראינו שיטה לחישוב A^{-1} $(A|I)\to\dots(I|A^{-1})$

תרגיל

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ א) מצאו את A^{-1}. ב) כתבו את A^{-1} כמכפלה של מטר' אלמנטריות.

פתרון

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\to$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\qquad E_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1/2\end{pmatrix}$$

$sgershon@technion.ac.il$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = A^{-1} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$