דטרמיננטה

נגדיר דטרמיננטה למטריצות ריבועיות.

עבור $n = 1$: $A = (a_{11})$ נגדיר $\det(A) = |A| = a_{11}$

עבור $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

עבור $n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

באופן כללי: $|A_{n\times n}| = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}$

כאשר M_{1ij} (**המינור** ה-i,j) – הדטרמיננטה המתקבל ע״י מחיקת השורה ה – i-ית והעמודה ה – j-ית במטריצה.

ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי כל עמודה או שורה.

דוג׳:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0$$

נפתח לפי עמודה ראשונה

כדאי לחפש עמודה / שורה ששיש בה הרבה אפסים כדי שהחישובים יהיו פשוטים.

$$\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&4&5&5\\0&0&6&4\\0&0&0&7\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}4&5&5\\0&6&4\\0&0&7\end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}6&4\\0&7\end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot(6\cdot 7-0\cdot 4) = 1\cdot 4\cdot 6\cdot 7$$

מסקנה חשובה: במטריצה משולשת (עליונה או תחתונה) הדטרמיננטה שווה למכפלת אברי האלכסון.

פעולות אלמנטריות על מטריצות

- החלפת שורות (או עמודות) במטריצה שקולה להכפלת הדטר׳ במינוס 1.
- מותר להוציא הוצאת סקלר משורה או עמודה **אחת**.
- הוספה כפולה של שורה (או של עמודה) לשורה (או עמודה) אחרת, לא משנה את ערך הדטר׳.

$$\begin{vmatrix}1&3&2&1\\-1&2&1&1\\0&3&4&5\\2&3&2&1\end{vmatrix} \underset{R_4\to R_4-2R_1}{\overset{R_2\to R_2+R_1}{=}} \begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&3&4&5\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix} \overset{\text{הוצאת מינוס מ } R_4}{=} -\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&3&4&5\\0&3&2&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4\to 5R_4-3R_2}{\overset{R_3\to 5R_3-3R_2}{=}} -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&11&19\\0&0&1&-1\end{vmatrix} \overset{R_3\leftrightarrow R_4}{=} \frac{1}{25}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&1&-1\\0&0&11&19\end{vmatrix} =$$

הכפלנו שורה בסקלר לכן הוצאנו החוצה את ההופכי שלו

הוספת מינוס

משולשת עליונה

$$\overset{R_4\to R_4-11R_3}{=} \frac{1}{25}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\0&5&3&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&30\end{vmatrix} = \frac{1}{25}\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot 30 = 6$$

הערה: למרות שחלקנו קבלנו תוצאה שלמה, כי הפעולות בדטר׳ הן כפל, חיבור וחיסור. המספרים במטר׳ המקורית היו שלמים ולכן התוצאה חייבת להיות מספר שלם.

חוקי דטר׳

- $|A| = |A^t|$ ז״א כל המשפטים בקשר ל det נכונים גם לעמודות
- ניתן לפתח לפי כל שורה או עמודה.

$sgershon@technion.ac.il$

- אם אחת השורות (העמודות) כולה אפסים אזיי $detA = 0$ ← מטריצה לא הפיכה

$|A| = 0$.

- מכפלת של det בסקלר, לא מאפשרת הכפלה של כל אברי המטריצה בסקלר.

$$\alpha|A| \neq |\alpha A|, \quad |\alpha A_{n\times n}| = \alpha^n|A|$$

- $|AB| = |A|\cdot|B|$

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

הוכחה: $A\cdot A^{-1} = I$

נפעיל דטר' על 2 האגפים: $|A\cdot A^{-1}| = |I|$

$$|A|\cdot|A^{-1}| = 1 \ \rightarrow \ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

תרגילים

.1

פתרו את המשוואה הבאה:

$$0 = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

כדי לא לקבל ממשואה ממעלה שלישית נעשה פעולות על הדטר' הפעם גם לפי עמודות.

$$0=\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} t+2 & -1 & 1 \\ t+2 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix} =$$

$$(t+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} (t+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

$$= (t+2)(t-2)(t+4-0) \ \rightarrow t = \pm 2, -4$$

פיתוח לפי שורה שנייה

.2

הוכיחו :

$$\begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma+m \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

פתרון נפתח לפי השורה השניה :

$$\begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma+m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -(\alpha+k)\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + (\beta+l)\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - (\gamma+m)\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - \gamma\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha M_{21} + \beta M_{22} - \gamma M_{23}) + (-k M_{21} + l M_{22} - m M_{23})$$

$$= \begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \text{b} & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

.3

נתון $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$ חשבו $\begin{vmatrix} 2a_1 & -c_1 & b_1 \\ 2a_2 & -c_2 & b_2 \\ 2a_3 & -c_3 & b_3 \end{vmatrix}$

עמודה ראשונה

עמודה שנייה

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & -c_1 & b_1 \\ 2a_2 & -c_2 & b_2 \\ 2a_3 & -c_3 & b_3 \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$|\text{A}| = |A^t|$

החלפת שורות

$sgershon@technion.ac.il$

$$-(-2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 \ \ = 10$$

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 12\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 4 = -48$$

3.

נתונה מטריצה A ממשית מסדר 6×6 ידוע ש A הפיכה ומתקיים $A^4 + 2A = 0$ חשבו את $|A|$.

פתרון

נצא מהנתון $A^4 + 2A = 0$ ונעביר אגפים כדי שנוכל להפעיל דטר׳ על שני האגפים.

$$A^4 = -2A \quad /|\ |$$

$$|A^4| = |-2A|$$

$$|A|^4 = (-2)^6|A| \ / \ |A| \neq 0$$

$$|A|^3 = (-2)^6 = 64$$

$$|A| = 4$$

sgershon@technion.ac.il

.4

נתונות 2 מטריצות A,B ממשיות מסדר $n \times n$ ונתון כי n אי זוגי ו $AB^tA = -B$. הוכיחו כי B איננה הפיכה.

פתרון

$$AB^tA = -B \quad /|\,|$$

$$|AB^tA| = |-B|$$

$$|A|\cdot|B^t|\cdot|A| = |-B|$$

$$|A|\cdot|B|\cdot|A| = -|B|$$

$$|A|^2\cdot|B| + |B| = 0$$

$$|B|(|A|^2+1) = 0 \quad \rightarrow |\mathrm{B}| = 0$$

.5

נתונה A מטריצה ממשית אנטי סימטרית מסדר אי זוגי, צ"ל $|\mathrm{A}| = 0$.

פתרון

$$A^t = -\mathrm{A} \quad /|\,|$$

$$|A^t| = |-\mathrm{A}|$$

$$|\mathrm{A}| = -|\mathrm{A}| \quad \rightarrow \quad 2|A| = 0 \quad \rightarrow |A| = 0$$

הערה : עבור מטריצה מסדר זוגי נקבל $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}|$ כך שלא נוכל לומר האם המטריצה הפיכה.

.6

כאשר סכום אברי השורות (העמודות) שווים, נשתמש בטריק הבא :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + \cdots + C_5}{=} \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 13 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 13 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$13\begin{vmatrix}1&2&2&2&2\\0&3&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{vmatrix}=13\cdot 3^4$$

הכללה:
$$\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha&\cdots&\alpha\\\alpha&\alpha+\beta&\cdots&\alpha\\\alpha&\cdots&\alpha+\beta&\alpha\\\alpha&\alpha&\cdots&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(n\alpha+\beta)\beta^{n-1}$$

.7

לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד?

$$\begin{cases}kx+y+z=1\\x+ky+z=3\\x+y+kz=5\end{cases}$$

פתרון

סכום אברי השורות שווה
נשתמש בתרגיל הקודם

נבנה det של מקדמים, נדרוש שהמטריצה תהיה הפיכה, ז"א $det\neq 0$

$$0\neq\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2\ \rightarrow\ k\neq -2,1$$

.8

$R_2\to R_2-R_1$

הוצאת סקלר

נתון $\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=4$ חשב $\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}$

$$4=\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\x+a&y+b&z+c\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}\alpha&x&a\\\beta&y&b\\\gamma&z&c\end{vmatrix}=-2$$

$R_1\leftrightarrow R_3$

$|A|=|A^t|$

sgershon@technion.ac.il

.9

לאילו ערכי n המטריצה הבאה הפיכה?

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}1100\cdots0\\0110\cdots0\\0011\cdots0\\\vdots\\100\cdots01\end{pmatrix}$$

פיתוח לפי עמודה ראשונה

פתרון: נחשב את $detA$ ונראה לאילו ערכי n היא שונה מאפס.

$$|A|=\begin{vmatrix}1100\cdots0\\0110\cdots0\\0011\cdots0\\\vdots\\100\cdots01\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\begin{vmatrix}110\cdots0\\011\cdots0\\\vdots\\000\cdots1\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\cdot1\begin{vmatrix}100\cdots0\\110\cdots0\\\vdots\\00\cdots11\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{זוגי } n\\2 & \text{אי זוגי } n\end{cases}$$

מסקנה A הפיכה לכל n אי זוגי.

.10

$r(A)=4$, $A_{4\times4}$ ומתקיים $|A^2|=|-A|$ האם $|A|=-1$?

לא, דרך א:

$$|A^2|=|-A|$$

$$|A|^2=(-1)^4|A|=|A|$$

$$0=|A|^2-|A|=|A|(|A|-1)$$

$|A|=1$

$r(A)=4\rightarrow|A|\neq0$

$sgershon@technion.ac.il$

דרך ב:

$r(A)=4$ לכן A הפיכה ולכן$|A|\neq 0$.

$$|A^2|=|-A|=|A|\ \ /|A|\neq 0$$

תרגיל:

הוכיחו כי $A=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ הפיכה ומצאו את A^{-1}.

פתרון $|A|=cos^2\alpha+sin^2\alpha=1$ ולכן המטריצה הפיכה.

נשתמש בנוסחה "המהירה":

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

כלל קרמר

למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון יחיד אמ"מ $|A|\neq 0$.

הפתרון הוא: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\cdots x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$ כאשר $\Delta=|A|$ ו Δ_i היא הדטרמיננטה של המטריצה

המתקבלת מ - A כאשר מחליפים את העמודה ה $-i-$ ית שלה בוקטור b.

דוג'

פתרו את המערכת: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}x=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון

נסמן $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\2&-1&-1\end{pmatrix} \leftarrow |A|=6$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1&=\begin{vmatrix}5&2&0\\2&1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6 \to x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{6}=1\\
\Delta_2&=\begin{vmatrix}1&5&0\\1&2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=12 \to x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{12}{6}=2\\
\Delta_3&=\begin{vmatrix}1&2&5\\1&1&2\\2&-1&1\end{vmatrix}=-6 \to x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-6}{6}=-1
\end{aligned}\right\} \quad x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

מטריצת ואן דר – מונדה

אם נבחר n מספרים $x_1,x_2,\cdots,x_n$ אזיי מטריצת ואן דר מונדה היא המטריצה הבאה:

$$A=\begin{vmatrix}{x_1}^0&{x_1}^1&{x_1}^2&\cdots&{x_1}^{n-1}\\{x_2}^0&{x_2}^1&{x_2}^2&\cdots&{x_2}^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\{x_n}^0&{x_n}^1&{x_n}^2&\cdots&{x_n}^{n-1}\end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה שלה היא:

$$|A|=\prod_{i<j}(x_j-x_i)$$

דוג': $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{pmatrix}$ חשבו $|A|$.

פתרון: זאת מטריצת ואן דר מונדה כאשר $x_1=1,x_2=2,x_3=4$.

$$|A|=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)=(2-1)(4-1)(4-2)=1\cdot3\cdot2=6$$