

$$y' - y \frac{1}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

נחשב אינטגרל של:

$$\int -\frac{1}{\sin x} dx = \int -\frac{\sin x}{(\sin x)^2} dx = \int -\frac{\sin x}{1 - (\cos x)^2} dx =$$

נסמן:

$$t = \cos x, dt = -\sin x dx$$

ונשתמש בפירוק לשברים חלקיים

$$= \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{2} \ln|1-t| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$$

לכן גורם האינטגרציה הוא:

$$e^{\int -\frac{1}{\sin x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \cot \frac{x}{2}$$

המעבר האחרון הוא ע"פ זהות טריגונומטרית.

נכפיל את המשוואה בגורם האינטגרציה ונקבל:

$$\cot \frac{x}{2} y' - \frac{\cot \frac{x}{2}}{\sin x} y = 1$$

$$\left( \cot \frac{x}{2} y \right)' = 1$$

נפעיל אינטגרל על שני האגפים ונקבל:

$$\cot \frac{x}{2} y = x + c$$

"נסדר" את הפתרון:

$$y = (x + c) \tan \frac{x}{2}$$