

27) $y' - 2y = y^2 e^x$
 y^2 : המשוואה היא הומוגנית $z = y^{1-2} = y^{-1}$ (משוואה)
 $\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x$
 $-z' + 2z = e^x$ (משוואה הומוגנית)
 $z' - 2z = -e^x$

$e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ "אינטגרל"
 $(e^{-2x} z)' = -e^{-x} + C$ "המשוואה הומוגנית"

$e^{-2x} z = C + 3e^{-x} \rightarrow z = 3e^{+x} + Ce^{2x}$
 $y = \frac{1}{z} \Rightarrow yz = 1 \rightarrow y(3e^{+x} + Ce^{2x}) = 1$
 בנקודה זו $y=0$ מוגדרת סינגולריות

28) $(x+1)(y' + y^2) = -y$
 $(x+1)y' + xy^2 + y^2 = -y$
 $(x+1)y' + y = y^2(-x-1) \quad /: (x+1)$
 $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$
 $z' - \frac{1}{x+1} z = A$ $z = y^{-1}$ (משוואה)
 $e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{-\ln(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ "אינטגרל"

$(\frac{1}{x+1} z)' = \frac{1}{x+1}$ "המשוואה הומוגנית"

$\frac{1}{x+1} z = \ln|x+1| + C$
 $z = (x+1)[\ln|x+1| + C]$

$y = \frac{1}{z} \rightarrow yz = 1 \rightarrow y(x+1)[\ln|x+1| + C] = 1$
 בנקודה זו $y=0$ מוגדרת סינגולריות

29) $y' = y^4 \cos x + y \tan x$
 $y' - y \tan x = y^4 \cos x$
 y^2 : המשוואה היא הומוגנית $z = y^{-3}$ (משוואה)

$z' + 3z \tan x = -3 \cos x$
 $e^{\int 3 \tan x dx} = e^{-3 \ln \cos x} = \frac{1}{\cos^3 x}$ "אינטגרל"
 $(\frac{1}{\cos^3 x} z)' = -\frac{3}{\cos^2 x}$ "המשוואה הומוגנית"

$\frac{1}{\cos^3 x} z = -3 \tan x + C$

$\frac{1}{y^3} = z = -3 \sin x \cos^2 x + C \cos^3 x$

בנקודה זו $y=0$ מוגדרת סינגולריות

30

$$xy^2 y' = x^2 + y^3 \quad /: xy^2$$

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = xy^{-2}$$

הצבה $z = y^3$ נגזרת

$$z' - \frac{3}{x}z = 3x$$

$$e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = \frac{1}{x^3} \quad \text{כפול}$$

$$\left(\frac{1}{x^3} z\right)' = \frac{3}{x^2}$$

הכפלה
המשוואה

$$\frac{1}{x^3} z = -\frac{3}{x} + C \rightarrow z = -3x^2 + Cx^3$$

$$\boxed{y^3 = -3x^2 + Cx^3}$$

31

$$xy dy = (y^2 + x) dx$$

$$xyy' = y^2 + x \quad /: xy$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$$

$$z' - \frac{2}{x}z = 2$$

הצבה $z = y^2$ נגזרת

$$e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{כפול}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} z\right)' = \frac{2}{x^2} \rightarrow \frac{1}{x^2} z = -\frac{2}{x} + C$$

הכפלה
המשוואה

$$\boxed{z = y^2 = -2x + Cx^2}$$

$|x=0$ נקודת קיצון או נקודת פיתול

32

$$xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y \quad /: x$$

$$y' - 2x \sqrt{y} = \frac{4}{x} y$$

$$y' - \frac{4}{x} y = 2x \sqrt{y}$$

הצבה $z = y^{1/2}$ נגזרת

$$z' - \frac{2}{x}z = x$$

$$e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{כפול}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} z\right)' = \frac{1}{x}$$

הכפלה
המשוואה

$$\frac{1}{x^2} z = \ln|x| + C = \ln|cx|$$

$$z = x^2 \ln|cx|$$

$$\boxed{y = z^2 = x^4 \ln^2|cx|}$$

$|y=0$ נקודת קיצון או נקודת פיתול

33

$$xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0 \quad /:x$$

$$y' + \frac{2}{x}y = -x^4 y^3 e^x$$

$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4 e^x \quad \text{נסו } z = y^{-2} \quad \text{מו}$$

$$e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4} \quad \text{כע}$$

המשוואה החדשה:

$$\left(\frac{1}{x^4} z\right)' = 2e^x$$

$$\frac{1}{x^4} z = 2e^x C \rightarrow \boxed{z = \frac{1}{y^2} = x^4(2e^x + C)}$$

$$\boxed{y=0} \quad \text{היא פתרון נוסף של המשוואה}$$

34

$$2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$$

$$2y' - \frac{x}{x^2-1}y = \frac{x}{y}$$

$$2z' - \frac{2x}{x^2-1}z = 2x$$

$$\text{נסו } z = y^2 \quad \text{מו}$$

$$z' - \frac{x}{x^2-1}z = x \rightarrow e^{-\int \frac{x}{x^2-1} dx} = e^{-\frac{1}{2} \ln|x^2-1|} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{כע}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} z\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\boxed{y^2 = z = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1}}$$

35) $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$

המשוואה היא הומוגנית - נניח $y = vx$ (כאן v תלוי ב- x)

$$\frac{x^3}{x'} \sin y = \frac{x}{x'} - 2y \quad | \cdot x'$$

$$x^3 \sin y = x - 2yx' \quad | : 2y$$

$$x' - \frac{1}{2y} x = -\frac{\sin y}{2y} x^3$$

$z' + \frac{1}{y} z = \frac{\sin y}{y}$ נניח $z = x^{-2}$ (כאן z תלוי ב- y)

$e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$ אינטגרל

$$(zy)' = \sin y$$

$$y \cdot \frac{1}{x^2} = zy = -\cos y + C \rightarrow \boxed{x^2(C - \cos y) = y}$$

בנוסף $y=0$ היא פתרון סינגולרי

36) $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$
 המשוואה היא הומוגנית - נניח $y = vx$ (כאן v תלוי ב- x)

$$(2x^2 y \ln y - x) \frac{1}{x} = y \rightarrow \frac{2x^2 y \ln y - x}{y} = x'$$

$$x' + \frac{1}{y} x = 2x^2 \ln y$$

נניח $z = x^{-1}$ (כאן z תלוי ב- y)

$$z' + \frac{1}{y} z = -2 \ln y$$

$$\left(\frac{1}{y} z\right)' = -\frac{2 \ln y}{y}$$

אינטגרל $e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} z = -\ln^2 y + C \rightarrow \frac{1}{xy} = -\ln^2 y + C \rightarrow \boxed{xy(C - \ln^2 y) = 1}$$

37 $x dx = (x^2 - 2y + 1) dy$
 $x(y)$ נורמל אונטן

$$xx' = x^2 - 2y + 1 \quad / : x$$

$$x' = x - 2y \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$x' - x = (1 - 2y) \frac{1}{x}$$

$$z' - z = 2(1 - 2y) \quad \text{נורמל } z = x^2 \quad \mu \text{ו}$$

$$\text{נורמל } e^{-\int 2 dy} = e^{-2y} \quad \mu \text{ו}$$

$$(ze^{-2y})' = (2 - 4y)e^{-2y}$$

$$ze^{-2y} = e^{-2y} \cdot 2y + C$$

$$x^2 e^{-2y} = 2y e^{-2y} + C$$

$$\boxed{x^2 = 2y + C e^{2y}}$$

38 $(x+1)(yy'-1) = y^2$ "1" → "30"
 $(xy+y)y' - (x+1) = y^2$ המשוואה

$$y' - \frac{x+1}{y(x+1)} = \frac{y^2}{y(x+1)}$$

$$y' - \frac{1}{y} = \frac{y}{x+1}$$

$$y' - \frac{y}{x+1} = \frac{1}{y}$$

$$z' - \frac{z}{x+1} = 2$$

$$\text{נורמל } z = y^2 \quad \mu \text{ו}$$

$$e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{-2 \ln(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \mu \text{ו}$$

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2} z\right)' = \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{המשוואה החדשה}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} z = \frac{-2}{x+1} + C$$

$$\boxed{z = y^2 = -2(x+1) + C(x+1)^2}$$

39 $x(e^y - y') = 2$

$$y' = \frac{z'}{z} \quad \leftarrow \ln z = y \quad \text{נורמל } z = e^y \quad \mu \text{ו}$$

$$x(z - \frac{z'}{z}) = 2 \quad \text{המשוואה החדשה}$$

$$xz^2 - xz' = 2z$$

$$z' + \frac{2}{x}z = z^2$$

$$t' - \frac{2}{x}t = -1$$

$$\text{נורמל } t = z^{-1} \quad \mu \text{ו}$$

$$e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2} \quad \mu \text{ו}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} t\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} t = \frac{1}{x} + C \rightarrow t = x + Cx^2$$

$$t = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^y} = e^{-y} = x + Cx^2$$